1.ÚVOD

Cílem této diplomové práce je seznámit čtenáře s problematikou polynomů jedné proměnné. Předpokládám, že čtenář již zná pojmy, které se týkají derivací a základních poznatků z algebry.

Diplomová práce je rozdělena do dvou kapitol, které jsou dále děleny do několika podkapitol.Každá podkapitola obsahuje základní věty a definice, které se týkají daného problému. Podkapitola dále obsahuje vzorově řešený příklad s popisem a úlohy k samostatnému procvičení s výsledky. K některým podkapitolám je uveden příklad využití polynomů jedné proměnné v praxi.

V první kapitole jsou přiblíženy polynomy jedné proměnné. Nalezneme v ní teorii a návod k řešení úloh dané problematiky, např. Hornerovo schéma, Bezoutova věta, derivace polynomu, nalezení racionálních kořenů a Euklidův algoritmus.

Řešení algebraických rovnic je popsáno v kapitole druhé. Je zde vysvětleno řešení binomické rovnice, dále pak řešení kvadratické, kubické rovnice a rovnice čtvrtého řádu, kdy tato problematika vede k řešení reciprokého polynomu prvního nebo druhého druhu. V této kapitole jsou také řešené příklady s popisem postupu a úlohy k samostatnému procvičení.

2. POLYNOMY JEDNÉ PROMĚNNÉ

Pojem funkce v matematické analýze

V matematické analýze se definuje funkce takto: Budiž dána nějaká množina čísel M . Přiřadíme-li každému číslu z M nějaký předpisem jednoznačně nějaké číslo, říkáme, že jsme definovali *funkci jedné proměnné na množině M*. Množina M se nazývá *obor funkce*. Čísla, která jsou přiřazena jednotlivým číslům z M, nazývají se *hodnoty funkce*.Tvoří jistou množinu N, *množinu hodnot funkce*.

Často je dáno přiřazení čísel z N k číslům z M nějakým početním předpisem jako např. $y = ax + b$, $y = x^2$, $y = 1/(x^2 + 1)$ atd. Tomu se rozumí tak : Do výrazu na pravé straně rovnosti se dosadí za x postupně čísla z M. Hodnoty y těchto výrazů, které takto dostaneme pro různá čísla z M, Udávají právě funkční hodnoty z N, která jsou jednotlivým číslům z M přiřazena. Symbol x, za nějž dosazujeme čísla z M a který tedy, jak se obvykle říká, může nabývat jakékoliv hodnoty z M, nazývá se *nezávisle proměnná*. Proměnné budu označovat vždy písmeny z konce abecedy x, y, z, . . .

Obecně označujeme funkci symbolem *f(x)* a to i tenkráte, je-li dána jiným přiřazením hodnot z N k hodnotám y M, než početními předpisy podobným těm, které byly právě uvedeny. Hodnotu funkce pro číslo $a \in M$ značíme pak *f(a).* Vyšetřujeme-li najednou více funkcí, rozlišujeme je indexy nebo užíváme dalších písmen: *g(x), h(x), F(x)* atd.

Protože přiřazujeme funkční hodnoty jednotlivým číslům a nikoliv dvojicím, trojicím nebo n-ticím čísel (n > 1), mluvíme o *funkcích jedné nezávislé proměnné* nebo také o funkci jedné proměnné.

Obsahuje-li množina M jen čísla reálná, mluvíme o *funkci reálné proměnné,* v opačném případě o *funkci komplexní proměnné.* Jsou-li hodnoty funkce jen reálná čísla mluvíme o *reálné funkci*, jsou-li to i čísla komplexní, mluvíme o *komplexní funkci.*

Definice 2.1:

Algebraická definice polynomu

V algebře budeme vyšetřovat funkce, jejichž funkční obor je nějaká algebraická množina: okruh, obor integrity, těleso. Funkční hodnoty budou prvky téhož oboru, na němž jsou funkce definovány, budou to tedy opět prvky okruhu, oboru integrity nebo tělesa.Vezmeme-li si za obor funkce například okruh zbytkových tříd *mod m*, nebude funkčním oborem množina čísel a funkční hodnoty nebudou rovněž čísla, nýbrž prvky z tohoto okruhu.

Definice 2.2:

R je okruh, x je symbol. Uvažujeme množinu $R[x]$ všech výrazů ve tvaru

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , a_i \in R$$

Dva výrazy $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ pokládáme za stejné, jestliže po vynechání nulových členů obdržíme identické výrazy.

Definice 2.3:

$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , a_n \neq 0$. Pak řekneme, že $f(x)$ je stupně n, píšeme $st\, f(x)=n$.

Nulovému polynomu nedáváme žádný stupeň.

2.1 Kořeny polynomů a jejich hledání:

2.1.1: Bezoutova věta

Definice 2.4:

Prvek $\alpha \in$ R se nazývá kořen polynomu *f(x)*.

f(x)$\in R[x]$, jestliže *f(x)* =0.

Věta 2.1: Bezoutova věta

f(x) $\in T[x]$, T je těleso, st *f(x)* > 0.Prvek $\alpha \in$ T je kořenem *f(x)* $\Leftrightarrow$ *(x -* α *)/ f(x).*

Věta 2.2:

Nechť *f(x)* je polynomem stupně *n (st = n)* nad tělesem T. Pak *f(x)* má v T nejvýše n kořenů.

PŘÍKLAD 1:

Užitím Bezoutovy věty ověřte, zda jsou čísla 2,-1 kořeny polynomu $f(x)=x^3-3x-2$ nad R.

ŘEŠENÍ:

Zjistíme, zda $\alpha=2,-1$ je kořenem polynomu podle Bezoutovy věty

$\underline{\alpha=2}$

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^3-3x-2)\div(x-2)=x^2+2x+1 \\
\underline{-(x^3-2x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2-3x \\
\qquad \underline{-(2x^2-4x)} \\
\qquad\qquad\quad x-2 \\
\qquad\qquad \underline{-(x-2)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\underline{\alpha=-1}$

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^3-3x-2)\div(x+1)=x^2-x-2 \\
\underline{-(x^3+x^2)} \\
\qquad -x^2-3x \\
\quad \underline{-(-x^2-x)} \\
\qquad\qquad -2x-2 \\
\qquad\quad \underline{-(-2x-2)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ 2,-1 jsou kořeny polynomu x^3-3x-2, protože v obou případech jsou zbytky po dělení nulové.

PŘÍKLAD 2:

Užitím Bezoutovy věty ověřte, zda jsou čísla 3,-1 kořeny polynomu $f(x)=x^4-10x^3+36x^2-54x+27$ nad R.

ŘEŠENÍ:

Zjistíme, zda $\alpha = 3, -1$ je kořenem polynomu podle Bezoutovy věty

$\underline{\alpha = 3}$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27\right) \div (x - 3) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 \\
\underline{-\left(x^4 - 3x^3\right)} \\
\quad -7x^3 + 36x^2 \\
\quad \underline{-\left(-7x^3 + 21x^2\right)} \\
\qquad 15x^2 - 54x \\
\qquad \underline{-\left(15x^2 - 45x\right)} \\
\qquad\quad -9x + 27 \\
\qquad\quad \underline{-\left(-9x + 27\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\underline{\alpha = -1}$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27\right) \div (x + 1) = x^3 - 11x^2 + 47x - 101 \\
\underline{-\left(x^4 + x^3\right)} \\
\quad -11x^3 + 36x^2 \\
\quad \underline{-\left(-11x^3 - 11x^2\right)} \\
\qquad 47x^2 - 54x \\
\qquad \underline{-\left(47x^2 + 47x\right)} \\
\qquad\quad -101x + 27 \\
\qquad\quad \underline{-\left(-101x - 101\right)} \\
\qquad\qquad 128
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ 3 je kořenem polynomu $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$, protože zbytek po dělení je 0.

$\Rightarrow$ -1 není kořenem polynomu $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$, protože zbytek po dělení není 0.

CVIČENÍ:

1. Užitím Bezoutovy věty ověřte, zda jsou čísla -2,1 kořeny polynomu

$f(x)=x^3-3x+2$ nad R.

[ano]

2. Zjistěte zda je číslo 7 kořenem polynomu $f(x)=2x^5-17x^4+23x^3-18x^2+29x-7$ nad R.

[ano]

3. Zjistěte užitím Bezoutovy věty zda je číslo -2 kořenem polynomu

$f(x)=x^5-x^4-13x^3+13x^2+36x+36$ nad R.

[ne]

4. Ukažte, že polynom $f(x)=12x^5+26x^4+6x^3+5x^2-4$ je dělitelný polynomem $g(x)=x+2$.

[ano]

5. Užitím Bezoutovy věty ukažte, že čísla $\alpha_1=5, \alpha_2=(-3)$ jsou kořeny polynomu

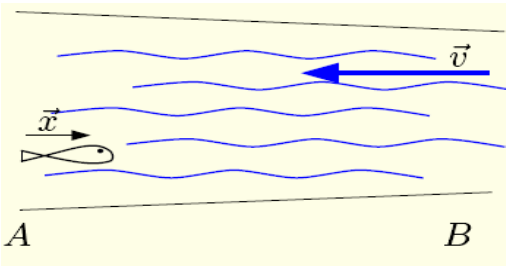
$f(x)=x^4-2x^3-13x^2-4x-30$.

[ano]

2.1.2: Derivace polynomu

PŘÍKLAD Z PRAXE:

Snažíme-li se dostat proti proudu řeky z bodu A do bodu B, musíme plavat dostatečně rychle, aby nás nestrhával proud, ale ne příliš rychle, abychom se brzo nevyčerpali. Je vhodné znát optimální rychlost, která umožní se dostat do cíle s vynaložením minimální energie.



$\Rightarrow$ Uvažujeme rybu, která plave proti proudu v řece.Rychlosti jsou měřeny vzhledem k břehu.

$\Rightarrow$ Ryba popluje takovou rychlostí, aby vydala co nejméně energie.

$\Rightarrow$ Energie vydaná za časovou jednotku na plavání je úměrná výrazu $(x+v)^3$ - třetí mocnina relativní rychlosti ryby vzhledem k vodě.

$\Rightarrow$ Vhodnou volbou jednotek dosáhneme toho, že $\vec{v}=1$.

$\Rightarrow$ Energie vynaložená za časovou jednotku na plavání je úměrná výrazu $(x+1)^3$.

$\Rightarrow$ Ryba popluje celkem [(vzdálenost k uplavání)/ (rychlost)] časových jednotek a doba plavání je tedy nepřímo úměrná rychlosti vzhledem k břehu x.

$\Rightarrow$ Energie k přeplutí z bodu A do B má být minimální: $\frac{(x+1)^3}{x}$ $\Rightarrow$ minimum

$$\left(\frac{(x+1)^3}{x}\right)' = \frac{3\cdot(x+1)^2\cdot x-(x+1)^3\cdot 1}{x^2} = \frac{(x+1)^2\cdot(2x-1)}{x^2}$$

$\Rightarrow$ Derivace je nulová pro $x=\frac{1}{2}$, tj. ryba plave vzhledem k břehu poloviční rychlostí, než jakou proudí voda. Z povahy úlohy je zřejmé, že se jedná o minimum.

Stacionární bod -1 nemá v této úloze praktický význam.

(viz (1))

Definice 2.5:

T je těleso, $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in T[x]$. Polynom $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}(i\times a_i)x^{i-1}$ se nazývá derivace polynomu $f(x)$.

Kořen α se nazývá alespoň k-násobným kořenem polynomu $f(x)$ jestliže $(x-\alpha)^k / f(x)$.

Věta 2.3:

T je těleso. Pak pro každé dva polynomy $f(x), g(x) \in$ T$[x]$ platí :

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Věta 2.4:

$f(x)\in T[x], \alpha\in T$ je kořen. Pak α je vícenásobným kořenem polynomu $f(x) \Leftrightarrow \alpha$ je kořenem $f'(x)$.

Věta 2.5:

T je těleso, $f(x)\in T[x], st\, f(x)=n$, nechť $f(x)$ má v T n kořenů (včetně násobnosti). Pak $f(x)$ má alespoň jeden dvojnásobný kořen $\Leftrightarrow$ D$(f(x), f'(x))\neq 1$.

Věta 2.6:

$k\in N, T$ je těleso. Je-li $\alpha\in T$ právě *k*- násobným kořenem $f(x)\in T[x]$ $\Rightarrow \alpha$ je právě $(k-1)$-násobným kořenem $f'(x)$.

PŘÍKLAD 1:

Určete hodnotu polynomu $f(x)=2x^5-3x^2+x+3$ nad R a jeho derivace v bodě t = -2.

ŘEŠENÍ:

Dosazením bodu t = -2 do polynomu vypočteme jeho hodnotu

$$f(-2)=2\cdot(-2)^5-3\cdot(-2)^2+(-2)+3$$
$$\underline{\underline{f(-2)=(-75)}}$$

Zderivujeme polynom $f(x)$

$$f'(x)=10x^4-6x+1$$

Dále dosadíme bod t = -2 a vypočteme hodnotu první derivace

$$f'(-2)=10\cdot(-2)^4-6\cdot(-2)+1$$
$$\underline{\underline{f'(-2)=173}}$$

<u>Věta 2.7:</u>

T je těleso , $a\in T$, $n\in Z$.

Celistvým násobkem $n\times a$ prvku a rozumíme :

$n>0 \quad a+a+a...+a$, kdy a sčítáme n-krát .

$n=0 \quad 0$

$n<0 \quad a-a-a...-a\ =(-a)+(-a)+...+(-a)$, kdy $(-a)$ sčítáme n-krát.

- pokud je T = R, pak $n\times a$ je klasické násobení

PŘÍKLAD 2:

Určete první a druhou derivaci polynomu $f(x)=2x^5+4x^4+2x^3+x+2$ nad Z_5.

ŘEŠENÍ:

$Z_5=\{0,1,2,3,4\}$

Vytvoříme si Cayleyho tabulku pro sčítání:

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$f(x) = 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x + 2$

$f'(x) = (5 \times 2)x^4 + (4 \times 4)x^3 + (3 \times 2)x^2 + 1$

Podle Cayleyho tabulky vypočítáme:

$\Rightarrow (5 \times 2)$ = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 4 + 4 + 2 = 3 + 2 = 0

$\Rightarrow (4 \times 4)$ = 4 + 4 + 4 + 4 = 3 + 3 = 1

$\Rightarrow (3 \times 2)$ = 2 + 2 + 2 = 4 + 2 = 1

Tedy $\underline{\underline{f'(x) = x^3 + x^2 + 1}}$

Nyní spočítáme druhou derivaci, kdy opět použijeme Cayleyho tabulku pro sčítání:

$f''(x) = (3 \times 1)x^2 + (2 \times 1)x$

$\Rightarrow (3 \times 1)$ = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 3

$\Rightarrow (2 \times 1)$ = 1 + 1 = 2

Tedy $\underline{\underline{f''(x) = 3x^2 + 2x}}$

CVIČENÍ:

1. Určete hodnoty $f(x), f'(x)$ polynomu

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$ nad R v bodě t = 2.

$$\begin{bmatrix} f(2)=18, \\ f'(2)=48 \end{bmatrix}$$

b) $f(x) = x^5-4x^3+6x^2-8x+10$ nad R v bodě t = 3

$$\begin{bmatrix} f(3)=175, \\ f'(3)=325 \end{bmatrix}$$

c) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1$ nad C v bodě t = 1 + 2i

$$\begin{bmatrix} f(1+2i)=(-12)-2i, \\ f'(1+2i)=(-16)+8i \end{bmatrix}$$

d) $f(x)=(1+i)x^4-4x^3+(3-i)x^2-2x$ nad C v bodě $t=1-i$

$$\begin{bmatrix} f(1-i)=0, \\ f'(1-i)=2 \end{bmatrix}$$

2. Určete první derivaci polynomu $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$ nad Z_5.

$$\left[4x^3+x^2-x-4\right]$$

3. Určete první a druhou derivaci polynomu $f(x)=2x^5-x^4+4x^3-2x^2+2x-1$ nad Z_5.

$$\begin{bmatrix} f'(x)=4x^3+2x^2-x-4, \\ f''(x)=2x^2+4x-1 \end{bmatrix}$$

2.1.3: Hornerovo schéma

Hornerovo schéma je metoda jak snadno spočítat hodnotu polynomu $f(x) \in T[x]$, a jeho derivaci v bodě $\alpha \in T[x]$.

<u>Definice 2.6:</u>

Nechť $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x)=\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ tedy:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (x-\alpha)\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + f(\alpha) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - \alpha \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + f(\alpha) =$$

$$= b_{n-1}x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - \alpha \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^i - \alpha b_0 + f(\alpha) =$$

$$= b_{n-1}x^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i-1} x^i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha b_i x^i - \alpha b_0 + f(\alpha) =$$

$$= b_{n-1}x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - \alpha b_i) x^i + f(\alpha) - \alpha b_0$$

Tedy $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = b_{n-1}x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - \alpha b_i) x^i + f(\alpha) - \alpha b_0$

Porovnáním koeficientů dostáváme

$$\begin{array}{ccc}
a_n = b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-1} = a_n \\
a_n = b_{n-2} - \alpha b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\
\vdots & \Rightarrow & \vdots \\
a_1 = b_0 - \alpha b_1 & & b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\
 & \Rightarrow & \\
a_0 = f(\alpha) - \alpha b_0 & & f(\alpha) = a_0 + \alpha b_0
\end{array}$$

To znamená, že koeficienty polynomu $q(x)$ můžeme rekurentně vyjádřit pomocí koeficientů polynomu $f(x)$. Postup zapisujeme do tabulky.

$$\begin{array}{cccccc}
\alpha & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \; \cdots & a_1 & a_0 \\
 & & \alpha b_{n-1} & \alpha b_{n-2} \; \dots & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\
\hline
\end{array}$$

$$b_{n-1} \quad b_{n-2} \qquad b_{n-3} \quad \cdots \quad b_0 \quad \underline{\underline{f(\alpha)}}$$

Celý postup lze opakovat pro polynom $q(x)$ atd.

Tedy dostáváme:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)q_1(x) + f(\alpha) \\ q_1(x) &= (x-\alpha)q_2(x) + q_1(\alpha) \\ &\vdots \\ q_n(x) &= (x-\alpha)q_{n+1}(x) + q_n(\alpha) \end{aligned}$$

<u>Definice 2.6:</u>

Pod Taylorovým rozvojem polynomu $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$

v bodě α budeme rozumět polynom

$b_n(x-\alpha)^n + b_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_2(x-\alpha)^2 + b_1(x-\alpha) + b_0$

<u>Věta 2.8:</u>

Pro koeficienty $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ polynomu, který je Taylorovým rozvojem polynomu $f(x)$ podle Definice 2.7 platí:

$$\begin{aligned} b_0 &= f(\alpha), \\ b_1 &= f'(\alpha), \\ b_2 &= \frac{f''(\alpha)}{2!}, \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= \frac{f^{n-1}(\alpha)}{(n-1)!}, \\ b_n &= \frac{f^n(\alpha)}{n!}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 1:

Určete vztah mezi polynomem $f(y)$ čtvrtého stupně, substitucí $y = x + c$ a příslušnými derivacemi a Hornerovým schématem.

ŘEŠENÍ:

Při zjišťování vztahu mezi polynomem $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 0$ a jeho derivacemi použijeme Hornerova schémata.

$$
\begin{array}{llllll}
c & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & cb_3 & cb_2 & cb_1 & cb_0 \\
\hline
c & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & f(c) \\
 & & cd_2 & cd_1 & cd_0 & \\
\hline
c & d_2 & d_1 & d_0 & f(c) & \\
c & & ce_1 & ce_0 & & \\
\hline
c & e_1 & e_0 & f''(c)\cdot\frac{1}{2}! & & \\
 & & cg_0 & & & \\
\hline
 & g_0 & f'''(c)\cdot\frac{1}{3}! & & & \\
\hline
c & f^{IV}(c)\cdot\frac{1}{4}! & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Dokážeme, že výrazy vypočtené na konci každého řádku použitím algoritmu Hornerova schématu mají přímý vztah k derivacím původního polynomu v daném čísle c. Ověříme to tak, že postupně vyjádříme všechna čísla b_i, d_i, e_i, g_i pomocí původních koeficientů a_i.

Dostaneme tedy tímto způsobem následující vztahy.

$$
\begin{aligned}
b_3 &= a_4 \\
b_2 &= a_3 + cb_3 = a_3 + ca_4 \\
b_1 &= a_2 + cb_2 = a_2 + ca_3 + c^2a_4 \qquad\qquad (1) \\
b_0 &= a_1 + cb_1 = a_1 + ca_2 + c^2a_3 + c^3a_4 \\
f(c) &= a_0 + cb_0 = a_0 + ca_1 + c^2a_2 + c^3a_3 + c^4a_4
\end{aligned}
$$

Zcela analogicky vyjádříme i další řádky Hornerova schématu pomocí koeficientu a_i.

$d_2 = b_3 = a_4$

$d_1 = b_2 + cd_2 = a_3 + ca_4 + ca_4 = a_3 + 2ca_4$

$d_0 = b_1 + cd_1 = a_2 + ca_3 + c^2a_4 + ca_3 + c^2a_4 + c^2a_4 = a_2 + 2ca_3 + 3c^2a_4$

$$f' = b_0 + cd_0 = ... = a_1 + 2ca_2 + 3c^2a_3 + 4c^3a_4 \qquad (2)$$

$e_1 = d_2 = b_3 = a_4$

$e_0 = d_1 + ce_1 = ... = a_3 + 3ca_4$

$$\frac{f''(c)}{2!} = d_0 + ce_0 = ... = a_2 + 3ca_3 + 6c^2a_4 \qquad (3)$$

$g_0 = e_1 = ... = a_4$

$$\frac{f'''(c)}{3!} = e_0 + cg_0 = a_3 + 4ca_4 \qquad (4)$$

$$\frac{f^{IV}(c)}{4!} = g_0 = e_1 ... = a_4 \qquad (5)$$

Z předcházejících zápisů již můžeme velice snadno vypočítat příslušné derivace, jestliže tyto výrazy znásobíme příslušnými faktoriály.

Výraz (1) je daný polynom $f(x)$ v čísle c.

Výraz (2) je $f'(c)$, protože znásobením 1! nedojde k žádné změně.

Z (3) vyplívá: $f''(c) = 2a_2 + 6ca_3 + 12c^2a_4$

Z (4) vyplívá: $f'''(c) = 6a_3 + 24ca_4$

Z (5) vyplívá: $f^{IV}(c) = 24a_4$

(viz [3])

PŘÍKLAD 2:

Pomocí Hornerova schématu vydělte polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x - 80$ polynomem $(x+3)$ nad R.

ŘEŠENÍ:

Určíme bod $\alpha = (-3)$ a vytvoříme tabulku, kam do prvního řádku sepíšeme koeficienty polynomu $f(x)$.

$\alpha = (-3)$	1	-2	4	-6	-80
		-3	15	-57	189
	1	-5	19	-63	$109 = f(-3)$

Hodnota polynomu v bodě $\alpha = (-3)$ je 109.

Částečný podíl $q(x) = x^3 - 5x^2 + 19x - 63$ a zbytek $r = f(-3) = 109$.

Můžeme tedy psát $f(x) = (x+3) \cdot (x^3 - 5x^2 + 19x - 63) + 109$.

PŘÍKLAD 3:

Pomocí Hornerova schématu určete hodnotu polynomu $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ nad Z_5 pro bod $\alpha = 2$.

ŘEŠENÍ:

Příslušné operace provádíme na množině $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ - množina zbytkových tříd mod 5 nad Z.

Vytvoříme tabulku:

$\alpha = 2$	2	0	3	4	2	1
		4	3	2	2	3
	2	4	1	1	4	$4 = f(2)$

Hodnota polynomu je v bodě $\alpha = 2$ je 4.

PŘÍKLAD 4:

Zjistěte, zda bod $\alpha = 3$ je kořenem polynomu $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ nad Z_5.

ŘEŠENÍ:

Množina zbytkových tříd je $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Použijeme Hornerovo schéma

$\underline{\alpha = 3}$	2	0	3	4	2	1
		1	3	3	1	4
	2	1	1	2	3	$\underline{\underline{0 = f(3)}}$

Bod $\alpha = 3$ je kořenem polynomu $f(x)$, protože zbytek $r = f(x) = 0$.

PŘÍKLAD 5:

Pomocí Hornerova schématu určete hodnotu polynomu $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$ pro bod $\alpha = 1 + 2i$ nad C.

ŘEŠENÍ:

Vytvoříme tabulku pro bod $\alpha = 1 + 2i$:

$\underline{\alpha = 1 + 2i}$	1	-3i	-4	5i	-1
		1 + 2i	3 + i	-3 – i	-11 – 2i
	1	1 - i	-1 + i	-3 + 4i	$\underline{\underline{-12 - 2i = f(1 + 2i)}}$

Hodnota polynomu v bodě $\alpha = 1 + 2i$ je $(-12 - 2i)$

PŘÍKLAD 6:

Zjistěte , zda $\alpha = -5$ je kořenem polynomu $f(x) = x^5 + 7x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 155x - 175$. Pokud je kořenem, určete jeho násobnost.

ŘEŠENÍ:

Použijeme Hornerovo schéma a vytvoříme tabulku pro bod $\alpha = -5$:

- do tabulky sepíšeme koeficienty polynomu

$\underline{\alpha = -5}$	1	7	4	8	155	-175	
		-5	-10	30	-190	175	
	1	2	-6	38	-35	$\underline{\underline{0 = f(-5)}}$	
		-5	15	-45	35		
	1	-3	9	-7	$\underline{\underline{0 = f'(-5)}}$		
		-5	40	-245			
	1	-8	49	$-\underline{\underline{252}}$			

Z Hornerova schématu vidíme, že bod $\alpha = -5$ je dvojnásobným kořenem polynomu $f(x) = x^5 + 7x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 155x - 175$.

Tento polynom můžeme napsat ve tvaru $(x+5)^2 \cdot (x^3 - 8x^2 + 49x - 252)$.

PŘÍKLAD 7:

Pomocí Hornerova schématu rozhodněte, zda $\alpha = -3$ je kořenem polynomu $f(x) = x^5 + 13x^4 + 58x^3 + 90x^2 - 27x - 135$ .Pokud ano, tak určete jeho násobnost.

ŘEŠENÍ:

Vytvoříme tabulku pro $\alpha = -3$:

$\alpha=-3$	1	13	58	90	-27	-135
		-3	-30	-84	-18	135
	1	10	28	6	-45	$0=f(-3)$
		-3	-21	-21	45	
	1	7	7	-15	$0=\frac{f'(-3)}{1!}$	
		-3	-12	15		
	1	4	-5	$0=\frac{f''(-3)}{2!}$		
		-3	-3			
	1	1	$-8=\frac{f'''(-3)}{3!}$			

$\frac{f'''(-3)}{3!}=-8$ už nesplňuje podmínku $\Rightarrow$ $\alpha=-3$ je trojnásobným kořenem polynomu

$f(x)=x^5+13x^4+58x^3+90x^2-27x-135$

Tento polynom napíšeme ve tvaru $f(x)=(x+3)^3\cdot(x^2+x-8)$.

PŘÍKLAD 8:

V polynomu $f(x)=x^3-5x^2+3x+b$ určete b tak, aby polynom $f(x)$ měl dvojnásobný kořen a určete zbývající kořeny polynomu.

ŘEŠENÍ:

Podle Věty 2.4 platí , pokud má polynom dvojnásobný kořen, potom platí $f'(x)=0$.

Polynom $f(x)=x^3-5x^2+3x+b$ derivujeme:

$f'(x)=3x^2-10x+3$

Užitím Hornerova schématu zjistíme kořeny polynomu $f'(x)=3x^2-10x+3$

$\underline{\alpha=3}$	3	-10	3
		9	-3
	3	-1	$\underline{\underline{0=f'(3)}}$

Kořen $\alpha=3$ splňuje podmínku.

Nyní vypočítáme ***b*** $\Rightarrow$ použijeme Hornerovo schéma pro polynom $f(x)=x^3-5x^2+3x+b$.

$\underline{\alpha=3}$	1	-5	3	b
		3	-6	-9
	1	-2	-3	$b-9=0 \Rightarrow \underline{\underline{b=9}}$
		3	3	
	1	1	$\underline{\underline{0=f'(3)}}$	

$$\underline{\underline{f(x)=(x-3)^2\cdot(x+1)}}$$

Polynom $f(x)=x^3-5x^2+3x+b$ má $\alpha=3$ dvojnásobný kořen pro bod b = 9. Další jednoduchý kořen polynomu je $\alpha=-1$.

PŘÍKLAD 9:

Určete Taylorův rozvoj polynomu $f(x)=x^4-2x^2+3x-1$ v bodě $\alpha=2$.

ŘEŠENÍ:

Sestrojíme Hornerovo schéma pro tento polynom a daný bod.

$\alpha=2$	1	0	-2	3	-1

	2	4	4	14
1	2	2	7	$\underline{13 = f(2)}$
	2	8	20	
1	4	10	$\underline{27 = \frac{f'(2)}{1!}}$	
	2	12		
1	6	$\underline{22 = \frac{f''(2)}{2!}}$		
	2			
1	$\underline{8 = \frac{f'''(2)}{3!}}$			
$\underline{1 = \frac{f^{IV}(2)}{4!}}$				

Z Hornerova schématu jsme získaly koeficienty Taylorova polynomu podle Věty 2.8.

Taylorův rozvoj polynomu $f(x)$ má tvar:

$$\underline{\underline{g(x) = (x-2)^4 + 8\cdot(x-2)^3 + 22\cdot(x-2)^2 + 27\cdot(x-2) + 13}}$$

PŘÍKLAD 10:

Zjistěte zda polynom $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ splňuje podmínky pro to , aby měl čtyřnásobný kořen.Určete pak zbývající kořeny polynomu.

ŘEŠENÍ:

Určíme $(n-1)$ derivaci polynomu $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$, kde $n = 4$.

$$f'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12$$

$$f''(x) = 30x^4 - 72x^2 - 24x + 18$$

$$f'''(x) = 120x^3 - 144x - 24 \;\Rightarrow\; \text{dále upravíme } f'''(x) = 5x^3 - 6x - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow$ kořenem polynomu je $\alpha = -1$

Dále použijeme Hornerovo schéma pro $\alpha = -1$:

$\alpha = -1$	1	0	-6	-4	9	12	4
		-1	1	5	-1	-8	-4
	1	-1	-5	1	8	4	$0 = f(-1)$
		-1	2	3	-4	-4	
	1	-2	-3	4	4	$0 = \frac{f'(-1)}{1!}$	
		-1	3	0	-4		
	1	-3	0	4	$0 = \frac{f''(-1)}{2!}$		
		-1	4	-4			
	1	-4	4	$0 = \frac{f'''(-1)}{3!}$			

Kořen $\alpha = -1$ je čtyřnásobným kořenem polynomu

$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.

Zbývající kořen vypočítáme z polynomu $(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^2 \Rightarrow \alpha = 2$ je dvojnásobným kořenem polynomu $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = \underline{\underline{(x+1)^4 \cdot (x-2)^2}}$$

PŘÍKLAD 11:

Pomocí Hornerova schématu vyjádřete polynom

$$f(x)=2\cdot(x+2)^5-20\cdot(x+2)^4+77\cdot(x+2)^3-141\cdot(x+2)^2+116\cdot(x+2)-20$$

v mocninách x.

ŘEŠENÍ:

Vypočítáme příslušné derivace v bodě $\alpha=-2$.

$$f(-2)=-20$$
$$f'(-2)=10\cdot(x+2)^4-80\cdot(x+2)^3+231\cdot(x+2)^2-282\cdot(x+2)+116$$
$$f''(-2)=40\cdot(x+2)^3-240\cdot(x+2)^2+462\cdot(x+2)-282$$
$$f'''(-2)=120\cdot(x+2)^2-480\cdot(x+2)+462$$
$$f^{IV}(-2)=240\cdot(x+2)-480$$
$$f^{V}(-2)=240$$

Po dosazení do vztahu $\frac{f^n(\alpha)}{n!}$ dostáváme hodnoty:

$$\frac{f'(-2)}{1!}=116$$
$$\frac{f''(-2)}{2!}=-141$$
$$\frac{f'''(-2)}{3!}=77$$
$$\frac{f^{IV}(-2)}{4!}=-20$$
$$\frac{f^{V}(-2)}{5!}=2$$

Vypočítáme obrácené Hornerovo schéma:

$\underline{\alpha=-2}$ $\qquad$ $2=\frac{f^{V}(-2)}{5!}$

$$
\begin{array}{llllll}
2 & -20=\dfrac{f^{IV}(-2)}{4!} & & & & \\
\hline
 & -4 & & & & \\
2 & -16 & 77=\dfrac{f'''(-2)}{3!} & & & \\
\hline
 & -4 & 32 & & & \\
2 & -12 & 45 & -141=\dfrac{f''(-2)}{2!} & & \\
\hline
 & -4 & 24 & -90 & & \\
2 & -8 & 21 & -51 & 116=\dfrac{f'(-2)}{1!} & \\
\hline
 & -4 & 16 & -42 & 102 & \\
2 & -4 & 5 & -9 & 14 & -20=f(-2) \\
\hline
 & -4 & 8 & -10 & 18 & -28 \\
2 & 0 & -3 & 1 & -4 & 8
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ z posledního řádku Hornerova schéma dostaneme hledaný polynom:

$$\underline{\underline{f(x)=2x^5-3x^3+x^2-4x+8}}$$

CVIČENÍ:

1. Pomocí Hornerova schématu určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomu $f(x)$ a $g(x)$, je-li :

a) $f(x)=x^5-x^4-13x^3+13x^2+36x-36$, $g(x)=x-2$ nad R

$$\begin{bmatrix} q(x)=x^4+x^3-11x^2-9x+18, \\ r(x)=0 \end{bmatrix}$$

b) $f(x)=4x^3+x^2$, $g(x)=x+1+i$ nad C

$$\begin{bmatrix} q(x)=4x^2-(3+4i)x+(-1+7i), \\ r(x)=8-6i \end{bmatrix}$$

2. Určete hodnotu polynomu $f(x)=2x^6+2x^4+2x^3+x^2+x+1$ v bodě $\alpha=3$ nad Z_5 aniž provedete dosazení.

$[f(3)=2]$

3. Určete, že polynom $f(x)=3x^5-16x^4+25x^3-6x^2-4x-8$ je dělitelný polynomem $g(x)=x-2$, aniž provedete dělení.

[je dělitelný]

4. Určete hodnotu polynomu v bodě α, aniž provedete dosazení, je-li:

a) $f(x)=2x^5-17x^4+23x^3-18x^2+29x-7, \alpha=2$ nad R

$[f(2)=-45]$

b) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7, \alpha=-2-i$ nad C

$[f(-2-i)=-1-44i]$

c) $f(x)=3x^6+7x^5-4x^3+4x^2+6x+1, \alpha=-2$ nad R

$[f(-2)=5]$

5. Určete násobnost kořene α polynomu $f(x)$:

a) $f(x)=x^3-5x^2+3x+9, \alpha=3$ nad R

[dvojnásobný]

b) $f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-8, \alpha=-2$ nad R

[trojnásobný]

c) $f(x)=(1+i)x^4-4x^3+(3-i)x^2-2x, \alpha=1-i$ nad C

[jednoduchý]

6. Určete absolutní člen a tak, aby polynom měl vícenásobný kořen.

a) $f(x)=x^4-10x^3+36x^2-54x+a$

$[a=27]$

b) $f(x)=x^3-12x+a$

$[a=16]$

7. Zjistěte zda polynom $f(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$ splňuje podmínky pro to , aby měl trojnásobný kořen.Určete pak zbývající kořeny polynomu.

$\left[f(x)=(x-2)^3\cdot(x+1)\right]$

8. Nalezněte Taylorův rozvoj polynomu $f(x)=x^5+2x^4+5x^3-3x^2-2x+7, \alpha=1$

$\left[g(x)=(x-1)^5+7(x-1)^4+23(x-1)^3+34(x-1)^2+20(x-1)+10\right]$

9. Pomocí Hornerova schématu vyjádřete polynom v mocninách x:

$f(x)=(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$

$\left[f(x)=x^4-4x^3+6x^2+2x+8\right]$

2.1.4: Nalezení racionálních kořenů polynomu

Věta 2.9:

Nechť $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Je- li racionální číslo $\frac{p}{q}$ $(D(p,q)=1)$ kořenem polynomu $f(x)$, pak $p/a_0, q/a_n$.

Věta 2.10:

Nechť $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_n \neq 0, n \geq 1$ je polynom s celočíselnými koeficienty a pro prvek $c \in Z$ nechť $f(c) \neq 0$. Pak je-li racionální číslo $\frac{p}{q}$ $(D(p,q)=1)$ kořenem polynomu $f(x)$,platí $(p-cq)/f(c)$.

Speciálně $(p-q)/f(1)$, jestliže $f(1)\neq 0$ a $(p+q)/f(-1)$, jestliže $f(-1)\neq 0$.

Věta 2.11: (Základní věta algebry)

Každý nenulový polynom $f(x)$ *stupně* n má v C právě n kořenů. (počítáno i s jejich násobností)

Věta 2.12:

Nechť číslo $\alpha=a+bi, b\neq 0$ je nulovým bodem polynomu $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ s reálnými koeficienty. Pak komplexně sdružené číslo $\overline{\alpha}=a-bi$ je rovněž nulovým bodem polynomu $f(x)$.

Věta 2.13:

Jestliže číslo $\alpha=a+bi, b\neq 0$ je k-násobný nulový bod polynomu $f(x)$ s reálnými koeficienty, je $\overline{\alpha}=a-bi$ též k-násobným nulovým bodem polynomu $f(x)$.

PŘÍKLAD 1:

Zjistěte, zda polynom $f(x)=12x^3+11x^2-7x-6$ má racionální kořeny.

ŘEŠENÍ:

$\dfrac{p}{q}$ je kořenem polynomu $f(x) \Rightarrow p/6, q/12$

Vypíšeme všechny dělitele čísla **6** : $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ (= p)

Vypíšeme všechny dělitele čísla **12**: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ (= q)

Možné racionální kořeny jsou $\dfrac{p}{q}: \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{2}{3}, \pm\dfrac{1}{4}, \pm\dfrac{3}{4}, \pm\dfrac{1}{6}, \pm\dfrac{1}{12}$

$\Rightarrow$ celkem máme 24 racionálních kořenů

Pomocí Hornerova schématu určíme $f(1), f(-1)$

$\underline{\alpha=1}$	12	11	-7	-6
		12	23	16
	12	23	16	$\underline{\underline{10=f(1)}}$

$\Rightarrow$ hodnota polynomu v bodě $\underline{\alpha=1}$ není rovna 0 $\Rightarrow$ $\underline{\alpha=1}$ není kořenem polynomu $f(x)$

$\underline{\alpha=-1}$	12	11	-7	-6
		-12	1	6
	12	-1	-6	$\underline{\underline{0=f'(-1)}}$

$\Rightarrow$ $\underline{\alpha=-1}$ je kořenem polynomu $f(x)$

Nyní můžeme vyškrtnout dva kořeny, kdy 1 není kořenem a (-1) je kořenem polynomu a zbývá jich 26.

$p - q \,/\, 10$, $p + q \,/\, 0$ $\Rightarrow$ začneme vyškrtávat

- např.: $-\frac{1}{4}$ nemůže být kořenem , neboť 1 - 4 =(-3) $\nmid$ $\underline{\underline{10 = f(1)}}$

$-\frac{2}{3}$ je kořenem , neboť 2 – 3 = (- 1) / $\underline{\underline{10 = f(1)}}$

Opět použijeme Hornerovo schéma pro polynom $g(x) = 12x^2 - x - 6$

$\alpha = -\frac{2}{3}$	12	-1	-6
		-8	6
	12	-9	$\underline{\underline{0}}$

Polynom $f(x) = 12x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ napíšeme ve tvaru $f(x) = (x+1)\cdot\left(x + \frac{2}{3}\right)\cdot(12x + 9)$

a dále ještě upravíme $\underline{\underline{f(x) = 3\cdot(x+1)\cdot\left(x + \frac{2}{3}\right)\cdot(4x+3)}}$.

PŘÍKLAD 2:

Určete všechny kořeny polynomu $f(x) = 6x^5 + 29x^4 + 31x^3 - 32x^2 - 102x - 72$, jestliže je známo, že některé z jeho kořenů jsou celočíselné, resp. racionální (a neceločíselné).

ŘEŠENÍ:

$\frac{p}{q}$ je kořenem polynomu $f(x) \Rightarrow p/72, q/6$

Určíme $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$

Určíme $q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Možné racionální kořeny jsou $\frac{p}{q}$, ale počet prvků je příliš velký, proto užijeme důsledku Věty 2.10.

Máme $f(-1)=-10$ a je-li $p\in C$ kořenem polynomu $f(x)$, platí $(p+1)/f(-1)=-10$. Tuto podmínku splňují prvky: $1,-2,-3,4,-6,9$.

Při postupném prověřování zjistíme, že čísla $1,-2$ nejsou celočíselnými kořeny polynomu $f(x)$.

Dostáváme Hornerovo schéma:

$\alpha=-3$	6	29	31	-32	-102	-72
		-18	-33	6	78	72
	6	11	-2	-26	-24	$0=f(-3)$

Nalezli jsme celočíselný kořen $\alpha=-3 \Rightarrow f(x)=(x+3)\cdot\left(6x^4+11x^3-2x^2-26x-24\right)$

Označíme $g(x)=6x^4+11x^3-2x^2-26x-24 \Rightarrow$ čísla 9, 4, -6 nejsou celočíselnými kořeny polynomu $g(x) \Rightarrow$ polynom $f(x)$ má tedy jediný celočíselný kořen $\alpha=-3$.

Při hledání racionálních neceločíselných kořenů $\alpha=\frac{p}{q}, p\in Z, q\in N, D(p,q)=1$ polynomu $g(x)$ využijeme, že $p/-24, q/6 \Rightarrow p=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$

$q=1,2,3,6$

$$\Rightarrow \frac{p}{q}=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3},\pm\frac{8}{3},\pm\frac{1}{6}$$

Užijeme opět Věty 2.9: $g(-1)=-5$ a budeme testovat jen ta racionální čísla $\frac{p}{q}$, pro něž $(p+q)/g(-1)=-5$, tj. $\frac{p}{q}=-\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},-\frac{1}{6}$

$\alpha = \frac{3}{2}$	6	11	-2	-26	-24
		9	30	42	24
	6	20	28	16	$\underline{\underline{0 = g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)}}$

Nalezli jsme racionální kořen, ale i rozklad polynomu:

$$g(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(6x^3 + 20x^2 + 28x + 16\right) = (2x - 3) \cdot \left(3x^3 + 10x^2 + 14x + 8\right)$$

Označíme $h(x) = 3x^3 + 10x^2 + 14x + 8$ a nyní hledáme kořeny tohoto polynomu.

Opět použijeme Větu 2.10: $h(-1) = 1$ a budeme testovat jen ta racionální čísla $\frac{p}{q}$, pro něž $(p+q) / g(-1) = 1$, tj. $\frac{p}{q} = -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}$

$\alpha = -\frac{4}{3}$	3	10	14	8
		-4	-8	-8
	3	6	6	$\underline{\underline{0 = h\left(-\frac{4}{3}\right) = g\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(-\frac{4}{3}\right)}}$

Tudíž $h(x) = \left(x + \frac{4}{3}\right) \cdot \left(3x^2 + 6x + 6\right) = (3x + 4) \cdot \left(x^2 + 2x + 2\right)$.

Celkem tedy $f(x) = (x + 3) \cdot (2x - 3) \cdot (3x + 4) \cdot \left(x^2 + 2x + 2\right)$.

Polynom $k(x) = x^2 + 2x + 2$ má kořeny $(-1 \pm i)$ jsme hotovi.

Zjistili jsme, že polynom $f(x)$ má celočíselný kořen (-3), dva racionální kořeny $\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}$ a dva komplexně sdružené kořeny $(-1 \pm i)$.

PŘÍKLAD 4:

Určete normovaný polynom čtvrtého stupně s reálnými koeficienty, který má dvojnásobný kořen $\alpha = 2 + i$.

ŘEŠENÍ:

Dle věty 2.12 je kořenem polynomu číslo $\overline{\alpha} = 2 - i$ a je také dvojnásobný.

Potom platí:

$$(x-(2+i))^2 \cdot (x-(2-i))^2 = \left(x^2 - 2(2+i)x + (2+i)^2\right) \cdot \left(x^2 - 2(2-i)x + (2-i)^2\right) =$$
$$= \left(x^2 - 4x - 2xi + 3 + 4i\right) \cdot \left(x^2 - 4x + 2xi + 3 - 4i\right) = \underline{\underline{x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25}}$$

CVIČENÍ:

1. Určete racionální kořeny polynomu $f(x)=4x^3-4x^2-11x+6$ nad R.

$$\left[\begin{array}{l}\alpha_1=\frac{1}{2},\\ \alpha_2=2,\\ \alpha_3=\left(-\frac{3}{2}\right)\end{array}\right]$$

2. Určete polynom čtvrtého stupně, jsou-li dány jeho kořeny $\alpha_1=5, \alpha_2=-4, \alpha_3=2, \alpha_4=-3$.

$$\left[f(x)=x^4-27x^2-14x+120\right]$$

3. Určete polynom $g(x)$, který má tytéž kořeny jako polynom $f(x)$ nad R, ale všechny jednoduché.

a) $f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$

$$\left[g(x)=x^3-x^2-2x+9\right]$$

b) $f(x)=x^4+2x^3-2x^2-6x+5$

$$\left[g(x)=x^3+3x^2+x-5\right]$$

c) $f(x)=x^3-8x^2+20x-16$

$$\left[g(x)=x^2+2x-8\right]$$

4. Určete všechny kořeny polynomu $f(x)=x^4-4x^2+8x-4$ nad C, víme-li, že jedním z kořenů polynomu je $\alpha=1+i$.

$$\left[\begin{array}{l}\alpha_{1,2}=1\pm i,\\ \alpha_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}\end{array}\right]$$

5. Určete všechny kořeny polynomu

$f(x)=x^6-12x^5+63x^4-168x^3+231x^2-156x+169$, jestliže víte, že má vícenásobný kořen $\alpha=3-2i$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,2}=3-2i, \\ \alpha_{3,4}=3+2i, \\ \alpha_{5,6}=\pm i \end{bmatrix}$$

6. Určete normovaný polynom čtvrtého stupně s reálnými koeficienty, který má dvojnásobný kořen $\alpha=1-i\sqrt{3}$.

$$\left[x^4-4x^3+12x^2-16x+16\right]$$

2.1.5: Dělitelnost polynomů jedné neurčité

Definice 2.7:

Jsou-li $f(x), g(x)$ dva polynomy z $T[x]$, pak říkáme, že $f(x)$ dělí $g(x)$, $g(x)$ je násobek $f(x)$.Potom existuje polynom $h(x) \in T[x]$ tak, že platí $g(x) = f(x) \cdot h(x)$.

Stupeň polynomu $f(x)$ je menší než stupeň polynomu $g(x)$. $(st\, f(x) \leq st\, g(x))$

Definice 2.8: **Největší společný dělitel polynomů**

a) Jsou-li $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in T[x]$, pak polynom $D(x) \in T[x]$ se nazývá největší společný dělitel polynomů $f_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ právě když platí:

$$D(x) / f_1(x) \wedge D(x) / f_2 \wedge \ldots \wedge D(x) / f_n(x)$$

b) Polynomy $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in T[x]$ jsou soudělné, když jejich největší společný dělitel $D(x)$ je stupně alespoň prvního. V opačném případě říkáme, že jsou nesoudělné.

Věta 2.14:

$f(x) \in T[x], charT = 0, st\, f(x) = n \geq 1.$ Pak polynom $g(x) \in T[x]$ takový, že $g(x) : D(f(x), f'(x)) = f(x)$ má tytéž kořeny, ale všechny jednoduché.

Věta 2.15: **Odstranění vícenásobných kořenů:**

Nechť $f(x)$ a $g(x) \neq 0$ jsou dva polynomy z $T[x]$. Pak existují v $T[x]$ právě dva polynomy $q(x), r(x)$ s vlastností:

$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, přičemž $r(x) = 0 \vee$ st $r(x) < st\, g(x)$

- v $T[x]$ existuje právě jeden (ve smyslu dělitelnosti) největší společný dělitel $D(x)$ polynomů $f(x)$ a $g(x)$. $D(x)$ lze určit Euklidovým algoritmem.

- odstranit vícenásobné kořeny můžeme také pomocí derivace polynomu, které jsme se věnovali v kapitole 2.1.2: Derivace polynomu

Obecné schéma Euklidova algoritmu:

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r_1(x),\, r_1(x)\neq 0 \wedge st\, g(x)>st\, r_1(x),$$
$$g(x)=r_1(x)\cdot q_1(x)+r_2(x),\, r_2(x)\neq 0 \wedge st\, r_1(x)>st\, r_2(x)$$
$$\vdots$$
$$r_{n-3}(x)=r_{n-2}(x)\cdot q_{n-2}(x)+r_{n-1}(x),\, r_{n-1}(x)\neq 0 \wedge st\, r_{n-2}(x)>st\, r_{n-1}(x)$$
$$r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)\cdot q_{n-1}(x)+r_n(x),\, r_n(x)=0.$$

Potom platí $D[f(x), g(x)]=r_{n-1}(x)$

PŘÍKLAD Z PRAXE:

Euklidův algoritmus použijeme také k odstranění vícenásobných kořenů. Kdy na jednodušší funkci jsme jej použili.

Dostanou-li se Země, Měsíc a Slunce do jedné přímky, nastává zatmění Slunce nebo zatmění Měsíce. Aby nastalo zatmění, musí nastat současně tyto dvě podmínky:

1. Měsíc musí být v novu (zatmění Slunce) nebo v úplňku(zatmění Měsíce). Době mezi dvěma stejnými fázemi Měsíce se říká synodický měsíc a trvá $s = 29{,}53058818$ dne.

2. Měsíc musí být v uzlu své dráhy(tj.v průsečíku své dráhy s rovinou ekliptiky). Době oběhu od uzlu k témuž uzlu se říká drakonický měsíc a trvá $d = 27{,}21221997$ dne.

ŘEŠENÍ:

Spočítáme nyní periodičnost obou dějů, tj. hledáme přirozená čísla a, b tak, aby platilo

$$\frac{s}{d}=\frac{29{,}53058818}{27{,}21221997}\doteq\frac{a}{b}$$

Samozřejmě, je snadné najít čísla a, b tak, aby poslední rovnost platila přesně – stačí zlomek $\frac{s}{d}$ rozšířit číslem 10^8 :

$$\frac{s}{d} = \frac{2953058818}{2721221997}$$

neboli

$$2721221997 \cdot s = 2953058818 \cdot d$$

To znamená, že po 80359286140 dnech, tj. po 22 001 173 letech a 175 dnech se zatmění jistě budou opakovat. My se budeme snažit zlomek $\frac{s}{d}$ aproximovat zlomkem tvaru $\frac{a}{b}$ a využijeme k tomu řetězové zlomky a Euklidův algoritmus:

$2\,953\,058\,818 = 1 \cdot 2\,721\,221\,997 + 231\,836\,821$
$2\,721\,221\,997 = 11 \cdot 231\,836\,821 + 171\,016\,966$
$231\,836\,821 = 1 \cdot 171\,016\,966 + 60\,819\,855$
$171\,016\,966 = 2 \cdot 60\,819\,855 + 49\,377\,256$
$60\,819\,855 = 1 \cdot 49\,377\,256 + 11\,442\,599$
$49\,377\,256 = 4 \cdot 11\,442\,599 + 3\,606\,860$
$11\,442\,599 = 3 \cdot 3\,606\,860 + 622\,019$
$3\,606\,860 = 5 \cdot 622\,019 + 496\,765$
$622\,019 = 1 \cdot 496\,765 + 125\,254$
$496\,765 = 3 \cdot 125\,254 + 121\,003$
$125\,254 = 1 \cdot 121\,003 + 4\,251$
$121\,003 = 28 \cdot 4\,251 + 1975$
$4\,251 = 2 \cdot 1975 + 301$
$1975 = 6 \cdot 301 + 169$
$301 = 1 \cdot 169 + 132$
$169 = 1 \cdot 132 + 37$
$132 = 3 \cdot 37 + 21$
$37 = 1 \cdot 21 + 16$
$21 = 1 \cdot 16 + 5$
$16 = 3 \cdot 5 + 1$
$5 = 5 \cdot 1 + 0$

Budeme nyní podíl $\frac{s}{d}$ aproximovat zlomky, které dostáváme z řetězového zlomku.

Například s použitím prvních dvou členů platí přibližná rovnost:

$$\frac{s}{d} = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11}$$

s chybou 1,7102 dne.

To znamená, že zhruba po 11 synodických měsících, tj. po cca 324,8 dnech bude Měsíc opět v uzlu a v novu nebo úplňku (s poměrně velikou chybou).Chceme-li chybu zmenšit, musíme k aproximaci použít delší řetězový zlomek. Nahradíme-li řetězovým zlomkem o šesti členech, dostaneme z Euklidova algoritmu:

$$\begin{aligned}
242 &= 1 \cdot 233 + 19 \\
223 &= 11 \cdot 19 + 14 \\
19 &= 1 \cdot 14 + 5 \\
14 &= 2 \cdot 5 + 4 \\
5 &= 1 \cdot 4 + 1 \\
4 &= 4 \cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

aproximaci $\frac{s}{d} \doteq \frac{242}{233}$

s chybou 0,0361 dne, tj. po 18 letech a 10 $\frac{1}{3}$ dnech se zatmění opakují (třetina dne posune zatmění o 120 stupňů zeměpisné délky). Tato perioda zatmění byla známa chaldejským astronomům již řadu století před naším letopočtem pod názvem Saros. (Trojnásobek periody Saros nese název Exeligmos, najdete jej pomocí aproximací z řetězového zlomku.)

(viz (4))

PŘÍKLAD 1:

Určete největšího společného dělitele $D(x)$ polynomů

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\ g(x) = x^3 - 1$.

ŘEŠENÍ:

Budeme užívat Eukleidův algoritmus

$$\Rightarrow \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) \div \left(x^3 - 1\right) = 1$$

$$\underline{-\left(x^3 - 1\right)}$$

$$-6x^2 + 11x - 5 = r_1(x), \qquad q = 1$$

$\Rightarrow$ dále platí:

$g(x) \div r_1(x) = q_1(x)$

Provedeme úpravu $g(x) \cdot 36$

$$\left(36x^3 - 36\right) \div \left(6x^2 - 11x + 5\right) = 6x + 11$$

$$\underline{-\left(36x^3 - 66x^2 + 30x\right)}$$

$$66x^2 - 30x - 36$$

$$\underline{-\left(66x^2 - 121x + 55\right)}$$

$$91x - 91 = r_2\ (x), \qquad q_1(x) = 6x + 11$$

$\Rightarrow$ dále platí:

$r_1(x) \div r_2(x) = q_2(x)$

$$\left(6x^2 - 11x + 5\right) \div (x - 1) = 6x - 5$$

$$\underline{-\left(6x^2 - 6x\right)}$$

$$5x + 5$$

$$\underline{-(-5x + 5)}$$

$$0 = r_3(x), \qquad q_2(x) = 6x - 5$$

$\Rightarrow$ Největším společným dělitelem daných polynomů $f(x), q(x)$ je $D(x) = x - 1$.

- největším společným dělitelem při užití Euklidova algoritmu je poslední nenulový zbytek (v našem případě to byl $r_2(x)$).

PŘÍKLAD 2:

Nalezněte částečný podíl q a zbytek r při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$.

$$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$$
$$g(x)=x^2-3x+1$$

ŘEŠENÍ:

$$\begin{array}{l}
(2x^4-3x^3+4x^2-5x+6)\div(x^2-3x+1)=2x^2+3x+11\\
\underline{-(2x^4-6x^3+2x^2)}\\
\qquad 3x^3+2x^2-5x\\
\qquad \underline{-(3x^3-9x^2+3x)}\\
\qquad\qquad 11x^2-8x+6\\
\qquad\qquad \underline{-(11x^2-33x+11)}\\
\qquad\qquad\qquad 25x-5
\end{array}$$

$$\Rightarrow q=2x^2+3x+11$$
$$r=5x-1$$

PŘÍKLAD 3:

Nalezněte $a\in C$ tak, aby polynom $f(x)$ byl dělitelný polynomem $g(x)$, jestliže:

$$f(x)=4x^4+16x^3+10x^2+16x+a$$
$$g(x)=x-i$$

ŘEŠENÍ:

$$\begin{array}{l}
(4x^4+16x^3+10x^2+16x+a)\div(x-i)=4x^3+16x^2+4x^2i+16xi+6x+6i\\
\underline{-(4x^4-4x^3i)}\\
\qquad 4x^3i+16x^3\\
\qquad\quad \underline{-(16x^3-16x^2i)}
\end{array}$$

$$4x^3i+16x^2i$$
$$\underline{-\left(4x^3i+4x^2\right)}$$
$$16x^2i+6x^2+16x$$
$$\underline{-\left(16x^2i+16x\right)}$$
$$6x^2+a$$
$$\underline{-\left(6x^2-6xi\right)}$$
$$6xi+a$$
$$\underline{-\left(6xi+6\right)}$$
$$a-6$$

$a-6 \rightarrow$ nenulový zbytek položíme roven 0 a vypočteme číslo a

$$a-6=0$$
$$\underline{\underline{a=6}}$$

PŘÍKLAD 4:

Nalezněte $a, b \in R(x)$ tak, aby polynom $f(x)$ byl dělitelný polynomem $g(x)$, jestliže:

$$f(x)=3x^5+8x^3+10x^2-ax+b$$
$$g(x)=x^2+3$$

ŘEŠENÍ:

$$\left(3x^5+8x^3+10x^2-ax+b\right)\div\left(x^2+3\right)=3x^2-x+10$$
$$\underline{-\left(3x^5+9x^3\right)}$$
$$-x^3+10x^2$$
$$\underline{-\left(-x^3-3x\right)}$$
$$10x^2+3x$$
$$\underline{-\left(10x^2+30\right)}$$
$$3x-ax+b-30$$

$3x-ax+b-30 \rightarrow$ nenulový zbytek po dělení, který položíme roven 0

$$x(3-a)+b-30=0$$

$$x(3-a)=0 \qquad\qquad b-30=0$$

$$\underline{\underline{a=0}} \qquad\qquad \underline{\underline{b=30}}$$

CVIČENÍ:

1.Určete Euklidovým algoritmem největší společný dělitel polynomů $f(x), g(x)$, jestliže:

a) $f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$

$g(x)=x^3-x^2-x+1$

$$[x^2-1]$$

b) $f(x)=3x^4+15x^3-13x^2-5x+4$

$g(x)=3x^3+6x^2-x-2$

$$[3x^2-1]$$

c) $f(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$

$g(x)=x^5+x^2-x+1$

$$[x^3-x+1]$$

d) $f(x)=2x^3+(2+i)x^2+(1+5i)x+3$

$g(x)=x^3+(1+4i)x^2+(-3+6i)x-9$

$$[-4]$$

2. Dělte se zbytkem polynom $f(x)=2x^4-3x^3+x^2-5x+6$ polynomem $g(x)=x-3$.

$$[q=2x^3+3x^2+10x+25, r=81]$$

3. Určete největší společný dělitel polynomů $f(x), g(x), h(x)$.

$f(x)=x^5-5x^4+9x^3-15x^2+18x$

$g(x)=2x^3-9x^2+7x+6$

$h(x)=x^4-7x^3+17x^2-17x+6$

$$[x^2-5x+6]$$

2.1.6: Vietovy vzorce

Věta 2.16:

Nechť $f(x)=x^2+px+q$ je normovaný kvadratický polynom, kde α_1,α_2 jsou jeho kořeny. Platí $f(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)=x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\cdot\alpha_2$. Porovnáním koeficientů dostáváme vztahy mezi nulovými body normovaného kvadratického polynomu a jeho koeficienty , tzv. **Vietovy vzorce pro normovaný kvadratický polynom:**

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2&=-p\\ \alpha_1\cdot\alpha_2&=q\end{aligned}$$

Podobná úvaha platí i pro normovaný kubický polynom $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,

jehož kořeny jsou $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Platí

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3)=x^3+(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x+(-\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

Porovnáním koeficientů dostáváme rovnosti:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=-a_2,\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3&=a_1,\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3&=-a_0\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 1:

Je dán kubický polynom $f(x)=x^3-3x+1$, jehož nulové body jsou $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Sestrojte normovaný kubický polynom $g(x)$, jehož nulové body jsou $\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_3+1$.

ŘEŠENÍ:

Zapíšeme Vietovy vzorce pro polynom $f(x)=x^3-3x+1$:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=0,\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3&=-3,\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3&=-1.\end{aligned}$$

- $g(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ je normovaný kubický polynom, jehož nulové body jsou $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \alpha_3+1$.

Z Vietových vzorců pro polynom $g(x)$ postupně určíme hodnoty koeficientů a_1, a_2, a_3.

$\Rightarrow$ platí:

$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)+(\alpha_3+1)=-a_2$, tj. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3=-a_2$

Víme, že $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \Rightarrow \underline{\underline{a_2=-3}}$

$\Rightarrow$ dále platí:

$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)+(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_3+1)+(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)=a_1$

Po úpravě dostaneme:

$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+3=a_1$, odkud vzhledem k tomu, že $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=-3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \Rightarrow \underline{\underline{a_1=0}}$

Nakonec $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)=-a_0$

Roznásobením dostaneme $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+1=a_0$

Po dosazení dostáváme $-1-3+0+1=a_0 \Rightarrow \underline{\underline{a_0=3}}$

Hledaný polynom $g(x)$ má tvar $\underline{\underline{g(x)=x^3-3x^2+3}}$.

Věta 2.17: Vietovy vzorce pro obecný polynom n-tého stupně

Nechť $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-a_1)\cdot(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Roznásobením tohoto součinu a porovnáním koeficientů u x^{n-1} dostáváme:

$$-\alpha_1 \quad -\alpha_2 \quad -\ldots-\alpha_n=\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad ,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Obdobně porovnáním koeficientů u x^{n-2} dostaneme:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

Analogicky $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-2}}{a_n}$,

. . . . . .

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} + \ldots + \ldots + \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Symbolicky se zapisují ve tvaru:

$$\sum \alpha_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sum \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\sum \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

PŘÍKLAD 2:

Určete všechny nulové body polynomu $f(x) = x^3 - 14x^2 + 56x - 64$, jestliže víte, že jeden z jeho nulových bodů je geometrickým průměrem ostatních.Řešte v R.

ŘEŠENÍ:

Označme a_1, a_2, a_3 nulové body polynomu $f(x)$ a napíšeme Vietovy vzorce:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 14,$

$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 56,$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 64.$

Dále podle zadání platí:

$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2\alpha_3}$

Umocněním $\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2\alpha_3}$ na druhou a dosazením do $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 64$ máme

$\alpha_1^{\ 3} = 64 \Rightarrow \alpha_1 = 4$

Dosazením hodnoty $\underline{\alpha_1 = 4}$ do $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 14,\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 56$ dostaneme:

$4(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_2\alpha_3 = 56,$

$4 + \alpha_2 + \alpha_3 = 14 \Rightarrow$ vyjádříme $\alpha_3 = 10 - \alpha_2$

Rovnici $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 64$ upravíme na tvar $\alpha_2 \cdot \alpha_3 = 16$ (dosazením $\alpha_1 = 4$) dále do této rovnice dosadíme $\alpha_3 = 10 - \alpha_2 \Rightarrow$ dostaneme

$\alpha_2(10 - \alpha_2) = 16$

Odtud dostaneme $\alpha_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 16}}{2}$ $\Rightarrow \underline{\alpha_1 = 2}$

$\underline{\alpha_2 = 8}$

Hledané kořeny polynomu $f(x)$ jsou 2 ,4 ,8 .

PŘÍKLAD 3:

Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro to, aby jeden z nulových bodů kubického polynomu $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ byl aritmetickým průměrem ostatních kořenů.

ŘEŠENÍ:

Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nulové body polynomu $f(x)$, pak platí:

$\alpha_1 = \dfrac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$, nebo $\alpha_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$, nebo $\alpha_3 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$

$\Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1 = 0$, nebo $\alpha_1 + \alpha_3 - 2\alpha_2 = 0$, nebo $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$

Pro nulové body platí:

$$(\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1)\cdot(\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2)\cdot(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=0$$

Vietovy vzorce pro polynom $f(x)$ jsou:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_2\,,$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=a_1\,,$$
$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3=a_0$$

Rovnici $(\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1)\cdot(\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2)\cdot(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=0$ přepíšeme ve tvaru:

$$[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3\alpha_3]\cdot[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3\alpha_2]\cdot[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3\alpha_1]=$$
$$=(a_2+3\alpha_3)\cdot(a_2+3\alpha_2)\cdot(a_2+3\alpha_1)=0,$$

$$a_2^3+3a_2^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+9a_2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+27(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=0$$

Dosazením do posledního vztahu z Vietových vzorců pak dostáváme:

$$a_2^3-3a_2^3+9a_1a_2-27a_0=0,$$
$$-2a_2^3+9a_1a_2-27a_0=0.$$

Odtud je zřejmé, že vztah $-2a_2^3+9a_1a_2-27a_0=0$ je nutnou, ale také i postačující podmínkou pro to, aby jeden z nulových bodů polynomu $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ byl aritmetickým průměrem ostatních nulových bodů.

Celý postup lze obrátit.

CVIČENÍ:

1. Určete všechny kořeny polynomu $f(x)=16x^4-64x^3-56x^2+16x-15$, jsou-li všechny kořeny tohoto polynomu členy aritmetické posloupnosti.

$$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$$

2. Určete všechny kořeny polynomu $f(x)$, jestliže

a) $f(x)=x^3-7x^2+12x-6$, jeden z kořenů je roven jedné šestině součtu zbývajících.

$$\left[3+\sqrt{3},3-\sqrt{3},1\right]$$

b) $f(x)=x^3+\left(3\sqrt{5}-5\right)x^2+\left(18-10\sqrt{5}\right)x+\left(8\sqrt{5}-24\right)$, jeden z kořenů je součinem ostatních.

$$\left[1-\sqrt{5},2,2-2\sqrt{5}\right]$$

c) $f(x)=2x^4-15x^3+35x^2-30x+8$, jeho kořeny jsou členy geometrické posloupnosti s kvocientem 2.

$$\left[\frac{1}{2},1,2,4\right]$$

3. Určete kořeny polynomu $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ z $R[x]$, má-li dva dvojnásobné kořeny.

[-1 dvojnásobný,
2 dvojnásobný]

2.1.7: Ireducibilní rozklady polynomů v $T[x]$

Definice 2.9:

Polynom $f(x) \in T[x], st\, f(x) \geq 1$ se nazývá reducibilní (rozložitelný) v $T[x]$, jestliže se dá psát jako součin dvou polynomů v $T[x]$, oba polynomy jsou alespoň stupně prvního. V opačném případě se nazývá polynom $f(x) \in T[x]$ ireducibilní (nerozložitelný).

- T je libovolné těleso pak platí: Je-li $f(x)$ reducibilní, pak existují $g(x), h(x)$ takové, že $st\, f(x) > st\, g(x), st\, h(x) \geq 1 \wedge f(x) = g(x) \cdot h(x)$

- reducibilita je relativní vlastnost. Např. polynom $f(x) = x^2 - 2$ ze $Z[x]$ je ireducibilní v $Q[x]$, ale je reducibilní v $R[x]$, neboť $x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right) \cdot \left(x - \sqrt{2}\right)$ a víme, že $\sqrt{2} \in R$, ale $\sqrt{2} \notin Q$.

Věta 2.18:

Každý polynom $f(x)$ stupně $n \geq 1$ lze nad R zapsat v součin ireducibilních prvků následovně:

$f(x) = a(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_r) \cdot \left(x^2 + a_1 x + b_1\right)\ldots\left(x^2 + a_s x + b_s\right)$, kde $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, a_i, b_i \in R$ pro $\forall i \in 1, \ldots, s$. Polynomy $x^2 + a_i x + b_i$ pro $\forall i \in 1, \ldots, s$ mají za kořeny dvě čísla komplexně sdružená, $n = r + 2s$.

Věta 2.19:

Platí následující tvrzení:

1. V $Z[x]$ může být reducibilní polynom stupně nultého (např. $2x + 4 = 2 \cdot (x + 2)$, kde 2 je polynom stupně nultého)
2. V $R[x]$ jsou ireducibilní polynomy stupně 1 a ty polynomy stupně 2, které mají pár komplexně sdružených kořenů.
3. Každý polynom z $C[x]$ stupně $n \geq 2$ je reducibilní v $C[x]$.
4. Každý nenulový polynom $f(x) \in Q[x]$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$f(x)=qf_p(x),$$

kde $q \in Q$ a f_p je polynom v $Z[x]$.

PŘÍKLAD 1:

Zjistěte, zda polynom $f(x)=x^2+2x+15$ je reducibilní nebo ireducibilní nad R.

ŘEŠENÍ:

Zjistíme kořeny polynomu $f(x)=x^2+2x+15$

$$D=4-4\cdot 15=-56 \Rightarrow D<0$$

$\Rightarrow f(x)$ je v $R[x]$ ireducibilní, protože polynom nejde rozložit v $R[x]$.

PŘÍKLAD 2:

Zjistěte, zda polynom $f(x)=x^2+2x+15$ je reducibilní nebo ireducibilní nad C.

ŘEŠENÍ:

$f(x)=x^2+2x+15$

- zjistíme kořeny polynomu

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 15}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{56i^2}}{2}=(-1)\pm i\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(x-1+i\sqrt{14}\right)\cdot\left(x-1-i\sqrt{14}\right)$$

$\Rightarrow f(x)$ je v $C[x]$ reducibilní

PŘÍKLAD 3:

Najděte rozklad polynomu $f(x)=x^4-9$, tak aby byl reducibilní nad C, R, Q, Z.

ŘEŠENÍ:

Polynom můžeme zapsat : $x^4-9=(x^2+3)\cdot(x^2-3)$

Potom platí: $C[x]$: $(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x-i\sqrt{3})\cdot(x+i\sqrt{3})$

$R[x]$: $(x^2+3)\cdot(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})$

$Q[x]$: $(x^2-3)\cdot(x^2+3)$

$Z[x]$: $(x^2-3)\cdot(x^2+3)$

CVIČENÍ:

1. Najděte rozklad polynomu $f(x)=32x^3+64x^2-120x-72$ tak, aby byl reducibilní v Z, Q.

$$\begin{bmatrix} Z:(x+3)\cdot(4x^2-4x-3)\cdot 8 \\ Q:(x+3)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 8 \end{bmatrix}$$

2. Najděte rozklad polynomu $f(x)=x^4-x^3+x-1$ tak, aby byl reducibilní v R a C.

$$\begin{bmatrix} R:(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2-x+1) \\ C:(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

3. ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

3.1: Binomické rovnice

Věta 3.1:

Rovnice ve tvaru $x^n - z = 0$, kde $z \in C, z \neq 0, n > 0, n \in N$, se nazývá binomická rovnice. Kořeny rovnice budeme nazývat n-té odmocniny z čísla z.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), x = \rho(\cos\tau + i\sin\tau)$$

S užitím Moivreovy věty obdržíme

$$\rho^n(\cos(n\tau) + i\sin(n\tau)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Pokud existuje n-tá odmocnina z čísla z, pak má tvar některého z čísel:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0,1,...,n-1$.

Definice 3.1:

Binomickou rovnici ve tvaru

$$x^n - 1 = 0,$$

kde $n \geq 1$, budeme nazývat rovnicí pro dělení kruhu.

Věta 3.2:

Binomická rovnice $x^n - z = 0$, kde má právě n různých kořenů a všechny jsou jednoduché, které jdou zapsat v goniometrickém tvaru:

$$x_k = \sqrt[n]{|r|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0,1,...,n-1$.

Věta 3.3:

Druhá odmocnina z komplexního čísla $a+ib, b\neq 0$, má dvě hodnoty, lišící se znamínkem a to:

a) pro $b>0$

$$\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]$$

b) pro $b<0$

$$\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]$$

PŘÍKLAD 1:

Vypočítejte všechny hodnoty symbolu $\sqrt[n]{1}$.

ŘEŠENÍ:

$1=\cos 0+i\sin 0$**,** pak hledané n-té odmocniny jsou:

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

kde $k=1,\dots,n$. Označíme-li

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

platí dle Moivreovy věty

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

nebo-li n-té odmocniny z čísla 1 můžeme označit postupně $\varepsilon,\varepsilon^2,\dots,\varepsilon^n$, kde $\varepsilon^n=1$.

Tento výpočet dále užíváme v Cardanovo vzorcích.

PŘÍKLAD 2:

Vyřešte rovnici $x^6 - 1 = 0$ a nalezněte všechny šesté odmocniny z jedné.

ŘEŠENÍ:

a) Tuto rovnici lze řešit algebraicky.

Výraz lze napsat: $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

Odtud dostaneme kořeny rovnice:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1, \\
x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \\
x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_4 &= -1 \\
x_5 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_6 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i
\end{aligned}
$$

b) Goniometrické řešení:

Doplníme do vzorce:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1 \\
x_2 &= 1\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i \sin\frac{2\pi}{6}\right) = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_3 &= 1\left(\cos\frac{4\pi}{6} + i \sin\frac{4\pi}{6}\right) = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_4 &= 1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1 \\
x_5 &= 1\left(\cos\frac{8\pi}{6} + i \sin\frac{8\pi}{6}\right) = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_6 &= 1\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i \sin\frac{10\pi}{6}\right) = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 3:

Řešte rovnici $x^5 = 2 + 3i$

ŘEŠENÍ:

Komplexní číslo převedeme na goniometrický tvar $r = 2 + 3i$

Dále zjistíme:

$$|r| = \sqrt{13},$$
$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}},$$
$$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}},$$
$$\Rightarrow \underline{\varphi = 56^\circ 18' 36''}$$

Doplníme do vzorce podle Věty 3.2 a zjistíme kořeny, které zaokrouhlíme:

$$x_1 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 11^\circ 15' 43'' + i \sin 11^\circ 15' 43''\right) = 1{,}267506 + 0{,}252398i$$
$$x_2 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 83^\circ 15' 43'' + i \sin 83^\circ 15' 43''\right) = 0{,}151636 + 1{,}283466i$$
$$x_3 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 155^\circ 15' 43'' + i \sin 155^\circ 15' 43''\right) = -1{,}173790 + 0{,}540827i$$
$$x_4 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 227^\circ 15' 43'' + i \sin 227^\circ 15' 43''\right) = -0{,}877078 - 0{,}949216i$$
$$x_5 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 299^\circ 15' 43'' + i \sin 299^\circ 15' 43''\right) = 0{,}631726 - 1{,}127475i$$

CVIČENÍ:

1. Řešte binomické rovnice:

a) $x^6 = 3 - 4i$

$$\begin{bmatrix} x_1 = 0{,}820363 + 1{,}018322i, \\ x_2 = -0{,}471711 + 1{,}219616i, \\ x_3 = -1{,}292075 + 0{,}201294i, \\ x_4 = -0{,}820363 - 1{,}018322i, \\ x_5 = 0{,}471711 - 1{,}219617i, \\ x_6 = 1{,}292075 - 0{,}201294i \end{bmatrix}$$

b) $x^3 = 5 + 3i$

$$\begin{bmatrix} x_1 = 1{,}078283 + 0{,}720486i, \\ x_2 = -0{,}720486 + 1{,}078283i, \\ x_3 = -1{,}078283 - 0{,}720486i \end{bmatrix}$$

2. Řešte binomické rovnice:

a) $x^3 = -8$

$$\begin{bmatrix} x_1 = 1 + \sqrt{3}i, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 1 - \sqrt{3}i \end{bmatrix}$$

b) $x^4 = -16$

$$\begin{bmatrix} x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \\ x_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \\ x_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \\ x_4 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

3.2: Diskriminant

Definice 3.2:

Diskriminantem n neurčitých $x_1, x_2, ..., x_n$ rozumíme polynom z $I[x_1, x_2, ..., x_n]$ ve tvaru:

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \le i \le n} (x_i - x_j)^2,$$

kde I je obor integrity.

Definice 3.3:

Nechť je dán polynom $f(x)$ ve tvaru $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_0 \neq 0, n \geq 1$.

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ jsou kořeny tohoto polynomu. Diskriminantem polynomu $f(x)$ budeme rozumět výraz $a_n^{2n-2} D_n(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

$$a_2^2 D_2(\alpha_1, \alpha_2) = a_1^{\ 2} - 4 a_0 a_2$$

Diskriminanty polynomů v základním tvaru $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ jsou:

$$D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = a_1^{\ 2} a_2^{\ 2} + 18 a_0 a_1 a_2 - 4 a_0 a_2^{\ 3} - 4 a_1^{\ 3} - 27 a_0^{\ 2}$$

$$D_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{1}{27}\left[4\left(12a_0 + a_2^{\ 2} - 3a_1 a_3\right)^3 - \left(27a_1^{\ 2} - 72a_0 a_2 + 2a_2^{\ 3} - 9a_1 a_2 a_3 + 27a_0 a_3^{\ 2}\right)^2\right]$$

Věta 3.4:

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty má :

1) dva různé kořeny, je-li její diskriminant $D_2 > 0$,

2) jeden dvojnásobný reálný kořen, je-li $D_2 = 0$,

3) pár komplexně sdružených kořenů, je-li $D_2 < 0$.

Věta 3.5:

Každá kubická rovnice (rovnice 3.stupně) je řešitelná.

Věta 3.6:

Nechť máme kubickou rovnici ve tvaru $x^3 + a_2 x + a_1 x + a_0 = 0$

Zavedeme substituci $x = y - \frac{a_2}{3}$, pak platí:

$y^3 + py + q = 0$,kde

$p = a_1 - \frac{a_2^{\ 2}}{3}$,

$q = a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2a_2^{\ 3}}{27}$

Definice 3.4:

Nechť je dána kubická rovnice $y^3 + py + q = 0$, pak její řešení lze nalézt pomocí tzv. Cardanových vzorců:

$$D_3 = -4p^3 - 27q^2 = (-108)\cdot\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$$

$$y_2 = \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$$

$$y_3 = \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$$

Věta 3.7:

Kubická rovnice s reálnými koeficienty ve tvaru $x^3 + px + q = 0$ má:

1) dvojnásobný kořen, je-li $D_3 = 0$

2) všechny kořeny reálné, je-li $D_3 > 0$

3) jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené, je-li $D_3 < 0$.

Věta 3.8:

Nechť diskriminant rovnice $x^3 + px + q = 0$ s reálnými koeficienty je kladný.

Pak kořeny této rovnice vypočteme následujícím způsobem. Nalezneme řešení goniometrické rovnice :

$$\cos t = -\frac{q}{2}\sqrt{\frac{27}{-p^3}}$$

ležící v intervalu $(0, \pi)$. Hledané řešení je pak dáno vztahy:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{t}{3}$$
$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{t+2\pi}{3}$$
$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{t+4\pi}{3}$$

kde druhá odmocnina z kladného čísla $-\frac{p}{3}$ je kladné číslo.

<u>Věta 3.9:</u>

Každá algebraická rovnice 4.stupně je algebraicky řešitelná.

<u>Věta 3.10:</u>

Nechť tedy máme algebraickou rovnici 4.stupně ve tvaru:

$$z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

Zavedeme substituci $z = x - \frac{a_3}{4}$, pak platí:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

kde

$$p = a_2 - \frac{3}{8} a_3^{\ 2},$$
$$q = a_1 - \frac{a_2 a_3}{2} + \frac{a_3^{\ 3}}{8},$$
$$r = a_0 - \frac{1}{4} a_1 a_3 + \frac{1}{16} a_2 a_3^{\ 2} - \frac{3}{256} a_3^{\ 4}$$

Provedeme substituci $x = \frac{1}{2}(u + v + w)$ a dostaneme, že u^2, v^2, w^2 jsou kořeny rovnice

(kubické resolventy)

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0$$

s podmínkou $uvw = -q$. Označíme-li kořeny kubické resolventy t_1, t_2, t_3 dostaneme :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right)$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right)$$
$$x_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)$$

$$z_i = x_i - \frac{a_1}{4}$$

<u>Věta 3.11:</u>

Diskriminant rovnic $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ je roven diskriminantu její kubické resolventy.

<u>Věta 3.12:</u>

Nechť rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, kde $q \neq 0$, je rovnice s reálnými koeficienty s $D_4 \neq 0$, Pak platí:

1) Je-li $D_4 < 0$, pak rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ má dva reálné kořeny a jeden pár komplexně sdružených kořenů.

2) Je-li $D_4 > 0, p < 0, p^2 - 4r > 0$, pak má rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ čtyři různé reálné kořeny.

3) Je-li $D_4 > 0$ a podmínky ve 2) nejsou splněny, pak má rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ dva páry komplexně sdružených kořenů.

<u>Definice 3.5:</u>

Nechť je dán polynom n-tého stupně, $n > 0$, ve tvaru :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ kde } a_n \neq 0.$$

Jestliže pro koeficienty polynomu $f(x)$ platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_n \\ a_1 &= a_{n-1} \\ a_2 &= a_{n-2} \\ &\vdots \\ a_k &= a_{n-k}, \end{aligned}$$

kde $k \leq \frac{n}{2}$, pak $f(x)$ nazveme reciprokým polynomem 1. druhu. Rovnici $f(x)=0$ budeme analogicky nazývat reciprokou rovnicí 1. druhu.

Věta 3.13:

Každý reciproký polynom $f(x)$ 1. druhu lichého stupně n lze psát ve tvaru

$$f(x)=(x+1)\,g(x),$$

kde polynom $g(x)$ je reciproký polynom 1. druhu sudého stupně $(n-1)$.

Můžeme se tedy omezit na polynomy sudého stupně:

$$f(x)=a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$
$$f(x)=\left(a_0x^{2m}+a_0\right)+\left(a_1x^{2m-1}+a_1x\right)+\ldots=0$$

$$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\ldots+a_{m-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_m=0$$
$$y=x+\frac{1}{x} \Rightarrow\ y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$
$$y^3-3y=x^3+\frac{1}{x^3},\ldots$$
$$b_0y^m+b_1y^{m-1}+\ldots+b_m=0 \Rightarrow y_1,y_2,\ldots,y_m$$
$$x^2-y_ix+1=0,\, i=1,\ldots,m \Rightarrow x_1,x_2,\ldots,x_{2m}$$

Definice 3.6:

Polynom $f(x)$ nazveme reciprokým polynomem 2. druhu, jestliže pro jeho koeficienty platí:

$$\begin{aligned} a_0 &= -a_n \\ a_1 &= -a_{n-1} \\ a_2 &= -a_{n-2} \\ &\vdots \\ a_k &= -a_{n-k}\,, \end{aligned}$$

Rovnici $f(x)=0$ pak nazveme reciprokou rovnicí 2. druhu.

Věta 3.14:

Každý reciproký polynom $f(x)$ 2. druhu lze psát ve tvaru

$$f(x)=(x-1)\,g(x),$$

kde polynom $g(x)$ je reciproký polynom 1. druhu.

PŘÍKLAD 1:

Vypočítejte kořeny polynomu $f(x)=x^3-9x^2+36x-28$.

ŘEŠENÍ:

Rovnici $x^3-9x^2+36x-28=0$ vyřešíme pomocí Cardanových vzorců.

Podle Věty 3.6 zavedeme substituci $x=y-\frac{a_2}{3}=x+3$

$\Rightarrow y^3+px+q=0$ vypočteme p,q :

$$p=a_1-\frac{a_2{}^2}{3}=9$$

$$q=a_0-\frac{a_1a_2}{3}+\frac{2a_2{}^3}{27}=26$$

Dosadíme do rovnice a dostaneme: $y^3+9y+26=0$

Vypočteme diskriminant: $D_3=-4p^3-27q^2=-4\cdot 9^3-27\cdot 26^2=-21168<0\Rightarrow$ podle Věty 3.7 bude jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené

Podle Cardanových vzorců vypočteme kořeny rovnice $y^3+9y+26=0$

$$y_1=\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)+\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}}+\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)-\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}}=$$

$$=\sqrt[3]{(-13)+14}+\sqrt[3]{(-13)-14}=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{(-27)}=1-3=\underline{\underline{-2}}$$

Pro ε platí: $\varepsilon = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi$$

$$y_2 = \varepsilon\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)+\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}} + \varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)-\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}} =$$

$$=1\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)+(-3)\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi\right)=$$

$$=\cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi - 3\cdot\cos\frac{4}{3}\pi - 3i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi = \underline{\underline{2+2\sqrt{3}i}}$$

$$y_3 = \varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)+\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}} + \varepsilon\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)-\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}} =$$

$$=1\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi\right)+(-3)\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)=$$

$$=\cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi - 3\cdot\cos\frac{2}{3}\pi - 3i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi = \underline{\underline{2-2\sqrt{3}i}}$$

Kořeny y_1, y_2, y_3 vrátíme zpět do substituce

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1}} = y_1 + 3 = (-2)+3 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = y_2 + 3 = \underline{\underline{5+2\sqrt{3}i}}$$

$$\underline{\underline{x_3}} = y_3 + 3 = \underline{\underline{5-2\sqrt{3i}}}$$

PŘÍKLAD 2:

Vypočítejte kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 6x + 5$.

ŘEŠENÍ:

Nemusíme dělat substituci, protože známe $p=(-6), q=5$

Vypočítáme diskriminant rovnice $x^3 - 6x + 5 = 0$

$D_3 = -4p^3 - 27q^2 = (-4)\cdot(-6)^3 - 27\cdot 5^2 = 189 > 0 \Rightarrow$ jsou všechny kořeny reálné

Kořeny rovnice nalezneme následujícím způsobem podle Věty 3.4:

$$\cos t = -\frac{q}{2}\cdot\sqrt{\frac{27}{-p^3}} \text{ , leží v intervalu } (0,\pi) \Rightarrow \underline{\underline{\cos t}} = -\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{27}{-(-6)^3}} = \underline{\underline{-\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

$$\underline{\underline{t = 152^\circ\, 06'}}$$

Pro hledané kořeny platí vztahy:

$$\underline{\underline{x_1}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t}{3} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{152^\circ 06'}{3} = \underline{\underline{1,7915}}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+2\pi}{3} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{152^\circ 06' + 360^\circ}{3} = \underline{\underline{-2,7912}}$$

$$\underline{\underline{x_3}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+4\pi}{3} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{152^\circ 06' + 720^\circ}{3} = \underline{\underline{0,9998}}$$

PŘÍKLAD 3:

Vypočtěte kořeny polynomu $z^4 - 4z^3 + 11z^2 + 8z - 26$.

ŘEŠENÍ:

Máme algebraickou rovnici 4.stupně ve tvaru:

$$z^4 - 4z^3 + 11z^2 + 8z - 26 = 0$$

Zavedeme substituci: $z = x - \frac{a_3}{4} = x + 1 \Rightarrow x^4 + 5x^2 + 22x - 10 = 0$

Podle Věty 3.10 zjistíme:

$$p = 5$$
$$q = 22$$
$$r = (-10)$$

Dosazením koeficientů do rovnice $t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0$ dostaneme kubickou rovnici tvaru $\Rightarrow t^3 + 10t^2 + 65t - 484 = 0$

Podle Věty 3.6 zavedeme substituci: $t = y - \frac{a_2}{3} = y - \frac{10}{3}$

Vypočteme p, q:

$$p = a_1 - \frac{a_2^{\,2}}{3} = \frac{95}{3}$$

$$q = a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2a_2^{\,3}}{27} = 26$$

Potom platí $y^3 + px + q = 0 \Rightarrow y^3 + \frac{95}{3}y - \frac{16918}{27} = 0$

Vypočítáme diskriminant $D_3 = -4p^3 - 27q^2 = -10727712 < 0 \Rightarrow$ jeden kořen je reálný a dva komplexně sdružené.

Podle Cardanových vzorců vypočítáme kořeny rovnice $y^3 + \frac{95}{3}y - \frac{16918}{27} = 0$

$$\underline{\underline{y_1}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8459}{27}\right) + \frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-10727712)}} + \sqrt[3]{\left(\frac{8459}{27}\right) - \frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-10727712)}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{22}{3}}}$$

$$y_2 = \varepsilon\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{8459}{27}\right) + \frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-10727712)}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{\left(\frac{8459}{27}\right) - \frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-10727712)}} =$$

$$= \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)\cdot\left(\frac{11}{3} + 2\sqrt{6}\right) + \left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi\right)\cdot\left(\frac{11}{3} - 2\sqrt{6}\right) = \underline{\underline{\left(-\frac{11}{3}\right) - i\cdot 6\sqrt{2}}}$$

$\underline{\underline{y_3 = \left(-\frac{11}{3}\right) - i\cdot 6\sqrt{2}}}$ - komplexně sdružený kořen

Vrátíme do substituce:

$$\underline{\underline{t_1}} = y_1 - \frac{10}{3} = \underline{\underline{4}}$$

$$\underline{\underline{t_2}} = y_2 - \frac{10}{3} = \underline{\underline{-7 + 6\sqrt{2}\cdot i}}$$

$$\underline{\underline{t_3}} = y_3 - \frac{10}{3} = \underline{\underline{-7 - 6\sqrt{2} \cdot i}}$$

$$\sqrt{t_1} = \pm 2$$
$$\sqrt{t_2} = \pm\left(\sqrt{2} + 3i\right)$$
$$\sqrt{t_3} = \pm\left(\sqrt{2} - 3i\right)$$

Kořeny kubické resolventy musí splňovat podmínku: $\sqrt{t_1} \cdot \sqrt{t_2} \cdot \sqrt{t_3} = q = (= 22)$

$$\Rightarrow \sqrt{t_1} = -2$$
$$\sqrt{t_2} = \left(\sqrt{2} + 3i\right)$$
$$\sqrt{t_3} = \left(\sqrt{2} - 3i\right)$$
$$\Rightarrow \underline{-q = -22}$$

Dostáváme kořeny rovnice 4.stupně:

$$\underline{\underline{x_1}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right) = \frac{1}{2}\left(-2 + \left(\sqrt{2} + 3i\right) + \left(\sqrt{2} - 3i\right)\right) = -1 + \sqrt{2}$$
$$\underline{\underline{x_2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right) = \frac{1}{2}\left(-2 - \left(\sqrt{2} + 3i\right) - \left(\sqrt{2} - 3i\right)\right) = -1 - \sqrt{2}$$
$$\underline{\underline{x_3}} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \left(\sqrt{2} + 3i\right) - \left(\sqrt{2} - 3i\right)\right) = 1 + 3i$$
$$\underline{\underline{x_4}} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \left(\sqrt{2} + 3i\right) + \left(\sqrt{2} - 3i\right)\right) = 1 - 3i$$

PŘÍKLAD Z PRAXE:

Nechť žebřík o délce $l = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{10}$ je opřen o bednu o rozměrech 1x1, o stěnu a o podlahu. Jak vysoko dosáhne?

ŘEŠENÍ:

Bedna dělí délku žebříku na dva úseky. Označme si x výšku horního úseku. Potom výška dolního úseku je 1, horizontální průmět horního úseku je 1 a horizontální průmět dolního úseku je $\frac{1}{x}$. Podle Pythagorovy věty je součet délek úseků:

$$l = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^{-2}+1}$$

Po umocnění na druhou

$$l^2 = x^2 + 1 + 2 \cdot \frac{x^2+1}{x} + x^{-2} + 1$$

neboli

$$x^4 + 2x^3 + 2 - l^2 + 2x + 1 = 0,$$

což je reciproká rovnice.

Zkusíme rozložit

$$l^2 = x^2 + 1 + 2 \cdot \frac{x^2+1}{x} + x^{-2} + 1 = \left(x^2 + ux + 1\right) \cdot \left(x^2 + vx + 1\right).$$

Dostáváme soustavu

$$uv = \left(2 - l^2\right) - 2 = -\frac{160}{9},$$

$$u + v = 2\,.$$

Hledáme seznam řešení rovnice $y^2 - 2y - \frac{160}{9}$, což je $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{160}{9}} = 1 \pm \frac{13}{3}$.

Rozložili jsme polynom na

$$x^4 + 2x^3 + 2 - l^2 + 2x + 1 = \left(x^2 + \frac{16}{3}x + 1\right) \cdot \left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right)$$

První z nalezených kvadratických trojčlenů nemá reálné kořeny, druhý lze rozložit

$$x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = (x-3) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Použijeme-li větší kořen $x = 3$, dosáhneme do výšky $x + 1 = 4$.

(viz (5))

PŘÍKLAD 4:

Vypočítejte kořeny polynomu $f(x) = x^7 - 2x^6 - x^4 - x^3 - 2x + 1$.

ŘEŠENÍ:

Polynom $f(x)$ je reciproký polynom 1. druhu lichého stupně a lze psát ve tvaru:

$f(x) = (x+1) \cdot g(x)$

Pomocí Hornerova schématu vypočteme polynom $g(x)$.

$\underline{\alpha=-1}$	1	-2	0	-1	-1	0	-2	1
		-1	3	-3	4	-3	3	-1
	1	-3	3	-4	3	-3	1	$\underline{\underline{0}}$

$g(x)=x^6-3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-3x+1$

$g(x)$ je reciproký polynom 1.druhu, ale sudý.

$x^6-3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-3x+1=0 \qquad /:x^3$

Podle Věty 3.12 zavedeme substituci:

$$y=x+\frac{1}{x}\Rightarrow y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow y^3-3y=x^3+\frac{1}{x^3}$$

Potom dostaneme: $3y-3y^2+6+y^3-3y-4=0$

$$\underline{y^3-3y^2+2=0}$$

Zavedeme další substituci podle Věty 3.6, kdy $y=z-\frac{a_1}{3}\Rightarrow y=z+1$

$\Rightarrow z^3+pz+q=0$

$p=a_1-\frac{a_2^{\ 2}}{3}=-3$

$q=a_0-\frac{a_1\cdot a_2}{3}+\frac{2\cdot a_2^{\ 3}}{27}=0$

Spočteme D_3:

$D_3=(-4)p^3-27q^2=108>0\Rightarrow$ že všechny kořeny jsou reálné.

Vypočteme kořeny rovnice:

$$\cos t=-\frac{q}{2}\cdot\sqrt{\frac{27}{-p^3}}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{z_1}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t}{3} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

$$\underline{\underline{z_2}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+2\pi}{3} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$$

$$\underline{\underline{z_3}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+4\pi}{3} = \underline{\underline{0}}$$

Vrátíme zpět do substituce $y = z + 1$

$$\Rightarrow y_1 = \sqrt{3} + 1$$
$$y_2 = -\sqrt{3} + 1$$
$$y_3 = 1$$

$\Rightarrow$ Dosazením do první substituce získáme kořeny polynomu: $y = x + \frac{1}{x}$

$$y_1 = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{2\cdot\sqrt{3}}}{2}}}$$

$$y_2 = -\sqrt{3} + 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_{3,4} = \frac{1-\sqrt{3} \pm i\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{3}}}{2}}}$$

$$y_3 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_{5,6} = \frac{1 \pm i\cdot\sqrt{3}}{2}}}$$

$$\underline{\underline{x_7 = -1}}$$

PŘÍKLAD 5:

Vypočítejte kořeny polynomu $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1$.

ŘEŠENÍ:

Polynom $f(x)$ je reciproký polynom 2. druhu $\Rightarrow 1$ . . . je kořenem polynomu.

Potom lze psát ve tvaru: $f(x) = (x-1)\cdot g(x)$

$$(x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1) \div (x-1) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$$

$g(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1 \Rightarrow g(x)$ je reciproký polynom 1.druhu, ale sudý

$x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \qquad / : x^2$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} - 2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Zavedeme substituci: $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Potom dostaneme: $y^2 - y - 4 = 0$

Řešíme kvadratickou rovnici $\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

Vrátíme zpět do substituce: $y = x + \frac{1}{x}$

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \frac{-(1+\sqrt{17}) \pm \sqrt{2+2\cdot\sqrt{17}}}{4}}}$$

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_{3,4} = \frac{-(1-\sqrt{17}) \pm \sqrt{2-2\cdot\sqrt{17}}}{4}}}$$

$$\underline{\underline{x_5 = 1}}$$

CVIČENÍ:

1. Řešte nad C kubické rovnice pomocí Cardanových vzorců:

a) $x^3 + 36x + 208 = 0$

$$\left[-4, 2 \pm 4i\sqrt{3},\right]$$

b) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

$$\left[-4, -1, -1\right]$$

2. Řešte nad C rovnici 4.stupně:

a) $x^4 - 3x^2 - 12x + 40 = 0$

$$\left[2 \pm i, -2 \pm 2i\right]$$

b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$

$$\left[1 \pm 2i, -2 \pm i\right]$$

3. Řešte v C reciproké rovnice:

a) $6x^6 + 5x^5 - 44x^4 + 44x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\left[1, -1, -\frac{1}{3}, -3, \frac{1}{2}, 2\right]$$

b) $x^5 - 11x^4 + 17x^3 - 11x + 1 = 0$

$$\left[\frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, -1\right]$$

c) $x^8 - x^7 + 39x^6 - 80x^5 + 100x^4 - 80x^3 + 39x^2 - 10x + 1 = 0$

$$\left[1, 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}\right]$$

4. ZÁVĚR

Diplomová práce je pojata jako „ učebnice“, která má čtenáře seznámit s řešením a metodikou polynomů jedné proměnné. Je určena studentům na středních a vysokých školách.

Jedním z cílů této diplomové práce, je přiblížit čtenáři pojem polynomy jedné proměnné. V každé podkapitole je popsán daný problém, který vede na řešení polynomů jedné proměnné. Pro názornost si čtenář může vyzkoušet vypočítat příklad podle předlohy a na závěr procvičit a ověřit získané znalosti a dovednosti na dalších příkladech s uvedenými výsledky.

Chtěla jsem touto diplomovou prací ukázat, že polynomy jedné proměnné můžeme řešit různými metodami. Některé kapitoly jsem doplnila příklady, kde se užívají polynomy v praxi.

Dále jsem s snažila podrobně vyřešit vzorové příklady, kde jsem popisovala jednotlivé kroky postupu, aby čtenář lépe pochopil danou problematiku.

5. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] **Krutský, F.**: *Algebra I.*, Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1995.

[2] **Drábek, J. a Hora, J.**: *Algebra. Polynomy a rovnice*, Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity, 2001.

[3] **Procházka, J.**: *Polynomy,* České Budějovice: Pedagogická fakulta, 1979.

[4] **Kořínek, V.**: *Základy algebry*, Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.

[5] **Emanovský, P.**: *Cvičení z algebry (polynomy, alg. rovnice)*, Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1993.

[6] **Mrkvička, T.**: *Algebra V.,* České Budějovice: Pedagogická fakulta, 2003.

[7] **Vysoká, J.**: *Algebra III.*, České Budějovice: Pedagogická fakulta, 1997.

[8] **Tlustý, P.**: *Algebra II.*, České Budějovice: Pedagogická fakulta, 1995.

6.SEZNAM POUŽITÝCH INTERNETOVÝCH ODKAZŮ

(1) http://old.mendelu.cz/~marik/aplikace/reka.pdf

(2) http://mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html

(3) http://mathworld.wolfram.com/topics/Polynomials.html

(4) http://www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml

(5) http://www.uk.cz/~maly/mnohocleny.pdf