

## Cvičení 8

V následujících příkladech předpokládejte, že data jsou pořízena jako náhodné výběry z populací sledujících normální rozdělení.

1. Vypočtete<sup>1</sup> střední hodnotu a rozptyl výběrového průměru  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Předpokládejte, že populace, ze které byl (náhodný) výběr získán, sleduje libovolné rozdělení se střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2$ . ○T○
2. Odvoďte<sup>2</sup> intervalový odhad pro střední hodnotu normálního rozdělení při známém rozptyle  $\sigma^2$ . Spolehlivost volte  $1 - \alpha$ . ○T○
3. Odvoďte<sup>3</sup> intervalový odhad pro střední hodnotu normálního rozdělení při neznámém rozptyle, který je odhadnutý výběrovým rozptylem  $s^2$ . Spolehlivost volte  $1 - \alpha$ . Těžké ○T○
4. Odvoďte intervalový odhad pro rozptyl normálního rozdělení. Spolehlivost volte  $1 - \alpha$ . ○T○
5. Ve výrobě granulovaných krmiv byla u granulátu TL 700 zjišťována životnost matrice v provozních hodinách (Šlo o matrice s průměrem 5 mm používané na výrobu krmné směsi A1 – pro prasata). U 15 matric byla zjištěna životnost v pracovních hodinách (viz tabulka 1).

Tabulka 1: Životnost matric v provozních hodinách

440	490	605	510	540	470	580	600
550	620	575	660	560	540	480	

- (a) Bodově odhadněte střední hodnotu a směrodatnou odchylku životnosti matrice.
  - (b) Stanovte 95% interval spolehlivosti pro průměrnou životnost matrice.
  - (c) Stanovte 95% levostranný interval spolehlivosti pro průměrnou životnost matrice. Tj. kolik hodin minimálně vydrží 95 % průměrných matric (lepších).
  - (d) Stanovte rozsah výběrového souboru, tak aby při 95% intervalovém odhadu průměrné životnosti matrice byla chyba nejvýše  $\pm 20$  provozních hodin (maximální přípustná chyba  $\Delta = 20$ ).
  - (e) Jaká je spolehlivost odhadu použijeme-li původní data (k dispozici je pouze zmíněných 15 matric), avšak maximální přípustná chyba nesmí převýšit hodnotu 10 provozních hodin?
6. Na základě příkladu 5 určete 95% interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku životnosti matrice.

Tabulka 2: Váha kaprů v gramech

3000	3100	2500	2500	4200	2100	3250	2500
4800	2300	4100	3600	3000	3600	4000	

7. Při výlovu rybníka bylo náhodně vybráno a zváženo 15 kaprů. Naměřené hmotnosti jednotlivých kaprů lze najít v tabulce 2.
- S 99% spolehlivostí odhadněte průměrnou hmotnost kapra.
  - Jakou minimální garantovanou nosnost musí mít taška, aby unesla **průměrného** kapra s 95% spolehlivostí?
  - Jakou minimální garantovanou nosnost musí mít taška, aby unesla **libovolného** kapra s 95% spolehlivostí?<sup>4</sup>
  - Pro publikaci výsledků výlovu je třeba uvést výsledky s předem určenou přesností. Kolik je třeba zvážit kaprů, aby bylo možno odhadnout střední hodnotu váhy kapra s 99% spolehlivostí a maximální přípustnou chybou 0,25 kg?
  - S jakou spolehlivostí lze odhadnout střední hodnotu váhy kapra v rybníce při maximální přípustné chybě nutné pro publikaci (0,25 kg) pouze na základě stávajícího výběru čítajícího 15 kaprů?
8. Na přednáškách Zemědělské fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích bylo provedeno mezi studenty náhodné šetření zjišťující poměr dívek a žen na přednáškách. Rozsah šetření byl  $n = 79$  studentů, z toho dívek a žen bylo 54.
- Intervalově, s 90% spolehlivostí, odhadněte populační pravděpodobnost dívek na přednáškách.
  - O kolik studentů by se musel výběr rozšířit, aby bylo možno s 90% odhadnout populační pravděpodobnost s maximální přípustnou chybou  $\Delta = 0,5\%$ ?
9. Firmy Bravo a Happy Day garantují zákazníkům minimálně 50% obsah pomerančové šťávy v pomerančových nektarech. Laboratorními zkouškami byly v osmi náhodně vybraných vzorcích naměřeny hodnoty, jež jsou uvedeny v tabulce 3.

<sup>1</sup>Pro výpočet využijte vlastností střední hodnoty, rozptylu a vlastností náhodného výběru.

<sup>2</sup>Pro odvození využijte výsledků z úkolu 1 a vlastností náhodných veličin.

<sup>3</sup>Pro odvození využijte výsledků z úkolu 1 a vlastností náhodných veličin.

<sup>4</sup>Chování náhodných veličin a jejich průměrů jsou poněkud odlišné. Přestože mají „shodnou“ střední hodnotu, rozptyly se nerovnají. Navíc dvě pozorování významně vybočující z intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu, tam mohou v průměru bez problémů patřit. Jako ilustraci jeden „statistický kameňák“: Tři kamarádi jdou na hon. Jeden je zatvrzelý republikán, druhý nepoučitelný komunista a třetí – statistik. Každý je svým způsobem postizen osobním přesvědčením, které se projeví na jejich střelbě. První střílí republikán a o jeden metr vpravo mine. Druhý, s ironickým úsměvem, vystřelí komunista. Kulka mine cíl o metr vlevo a republikán vrátí kolegovi úšklebek. Oběma střílejícím však vyrazí dech jejich kolega statistik, který složí zbraň a má se k odchodu. Na jednohlasnou otázku vystřelivších, „proč ... NESTŘÍLÍŠ?!?!“ stoicky klidně odpoví otázkou: „Proč bych střílel, přátelé, v průměru už jsme ho přece dostali?“

Tabulka 3: Obsah pomerančové šťávy (%)


<b>Bravo</b>	58,8	50,2	53,5	49,4	51,7	47,9	50,3	53,3
<b>Happy Day</b>	51,1	49,7	53,8	52,3	50,5	49,1	52,8	57,1

Stanovte 95% interval spolehlivosti pro průměrnou hodnotu a směrodatnou odchylku obsahu pomerančové šťávy u jednotlivých značek.

10. Uvažujte náhodné výběry ze dvou různých populací.
- Pro jakou populaci lze vytvořit přesnější (užší) 95% interval spolehlivosti pro populační pravděpodobnost, jsou-li odhady populačních pravděpodobností rovny  $p_1 = 0,01$  a  $p_2 = 0,48$  a rozsahy výběrů jsou  $n_1 = 78$  a  $n_2 = 100$ ?
  - Který interval spolehlivosti pro populační pravděpodobnost by byl užší, kdyby se odhady populační pravděpodobnosti rovnaly ( $p_1 = p_2$ ) a rozsahy výběrů byly  $n_1 = 78$  a  $n_2 = 100$ ?
  - [K zamyšlení] O kolik procent vyšší respektive nižší je třeba uskutečnit výběr z první populace, aby byla zachována stejná spolehlivost a přesnost intervalového odhadu populační pravděpodobnosti jako u výběru z druhé populace? Vyřešte obecně, uvažujte následující bodové odhady populačních pravděpodobností v jednotlivých populacích:
    - $p_1 = 0,45$  a  $p_2 = 0,999$ ,
    - $p_1 = 0,001$  a  $p_2 = 0,999$ .
11. Opakovanými měřeními byla zjištěna tloušťka vláken. Uvedené hodnoty v tabulce 4 jsou v  $10^{-6}$  m.

Tabulka 4: Tloušťky vláken ( $10^{-6}$  m)

210	217	209	216	216	215	220	214	213
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Je známo, že měření mají právě rozdělení  $N(\mu; 25)$ . Nalezněte 95% interval spolehlivosti pro  $\mu$ .
  - Nalezněte 95% interval spolehlivosti pro  $\mu$  za předpokladu, že rozptyl není znám a je ho proto nutno odhadnout výběrovým rozptylem  $s^2$ .
12. Ankety o legalizaci měkkých drog se zúčastnilo 500 osob. Jaká je maximální přípustná chyba tohoto šetření chceme-li 95% odhad procenta osob souhlasících s legalizací. K zamyšlení
13. [aneb Dcv.] Projděte „vzorově“ řešené příklady ([cv\\_5.pdf](#) a [cv\\_7.pdf](#)) viz podadresář tohoto cvičení – [rpzs](#)<sup>5</sup>. Zkuste vyřešit samostatně.
14. [aneb Dcv.] V souboru [04\\_04\\_14.pdf](#) naleznete zadání průběžné písemky. Otestujte své 

<sup>5</sup>resene příklady ze skript (lehce modifikované)

znalosti ;-).