Př 7: S 95% spolehlivostí odhadněte variabilitu (prostřednictvím odhadu směrodatné odchylky) a střední hodnotu obsahu vitamínu C u rajčat. Znáte-li výsledky rozboru 10-ti vzorků rajčat:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
29,6	32,4	30	31,6	29,7	29,2	35,9	32,6	34,7	35,3

Pro odůvodnění následujících konstrukcí je podstatné předpokládat, že výběr byl proveden:

z normálního rozdělení $\mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$ *– vzhledem k tomu, že na obsah vitamínu C má vliv mnoho drobných vesměs nezávislých faktorů a jeho množství bude zřejmě pocházet ze spojitého rozdělení můžeme výběr považovat za výběr z normálního rozdělení*

rozptyl σ^2 *neznáme a nahrazujeme jej nestranným odhadem tedy výběrovým rozptylem* s^2.

μ

i) **Ručně stručně**

Ve skriptech případně v paměti vylovíme vzorec pro konfidenční interval pro parametr μ *(pro střední hodnotu), který má tvar:*

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)\,;\,\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) \qquad 1.$$

Nyní je zapotřebí spočítat výběrové *charakteristiky* (výběrový průměr – $\bar{x}$ a výběrovou směrodatnou odchylku – s) podle vzorců:

$\Rightarrow$ $\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i$ *, kde n je počet pozorování a* x_i *je hodnota i-tého pozorování*

$\Rightarrow$ $\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ *, kde n je počet pozorování a* x_i *je hodnota i-tého pozorování*

$\Rightarrow$ $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ *je příslušný kvantil Studentova t rozdělení s* $(n-1)$ *stupni volnosti*

Tedy $\bar{x}=32{,}1$, $s=2{,}813519$ *a konečně kvantil nalezený v tabulkách má hodnotu:* $t_{0{,}975}(9)=2{,}262157$

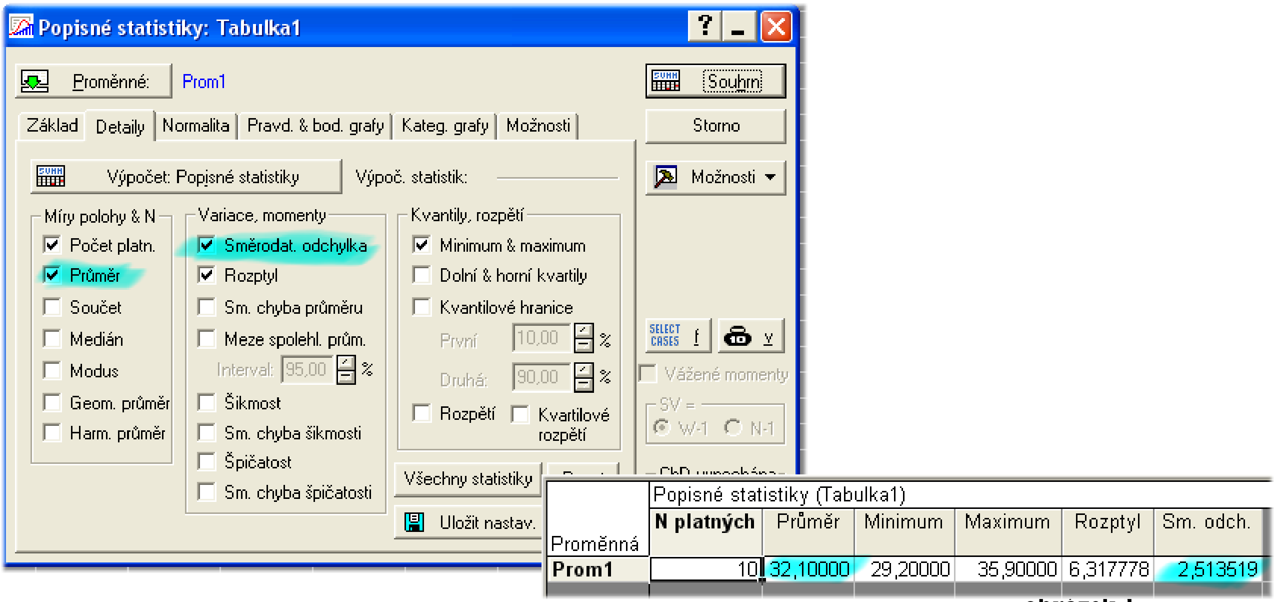
Dosazením do vztahu 1. dostaneme:

$$\left(32{,}1-\frac{2{,}513519}{\sqrt{10}}\cdot 2{,}262157\,;\,583+\frac{2{,}513519}{\sqrt{10}}\cdot 2{,}262157\right)=$$
$$=\left(32{,}1-1{,}798063\,;\,32{,}1+1{,}798063\right)=\left(30{,}30194\,;\,33{,}89806\right)$$

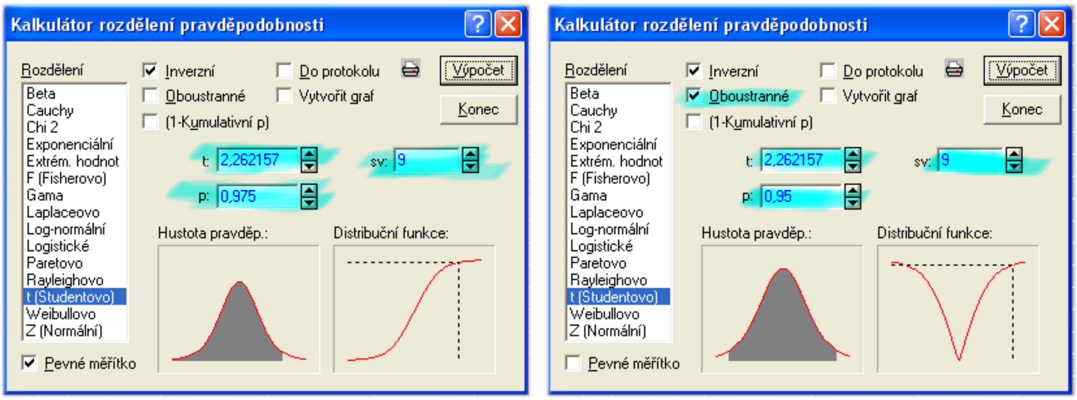
Tím jsme spočetli 95% konfidenční interval pro střední hodnotu.

ii) s využitím základních funkcí programu Statistika

Ve skriptech případně v paměti vylovíme vzorec pro konfidenční interval (vztah 1.). Nyní je zapotřebí spočítat výběrové charakteristiky (výběrový průměr – $\overline{x}$ a výběrovou směrodatnou odchylku – s). Do programu statistika zadáme požadovaná data a v modulu ***Popisné statistiky*** *si „necháme“ spočítat výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku (obrázek 1). Dále pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru spočteme příslušný kvantil. Buďto zadáme p=0,975, nebo zadáme p=0,95 a zaškrtneme pole Oboustranné (obrázek 2).*



obrázek 1



obrázek 2

Dosazením do vztahu 1 dostaneme:

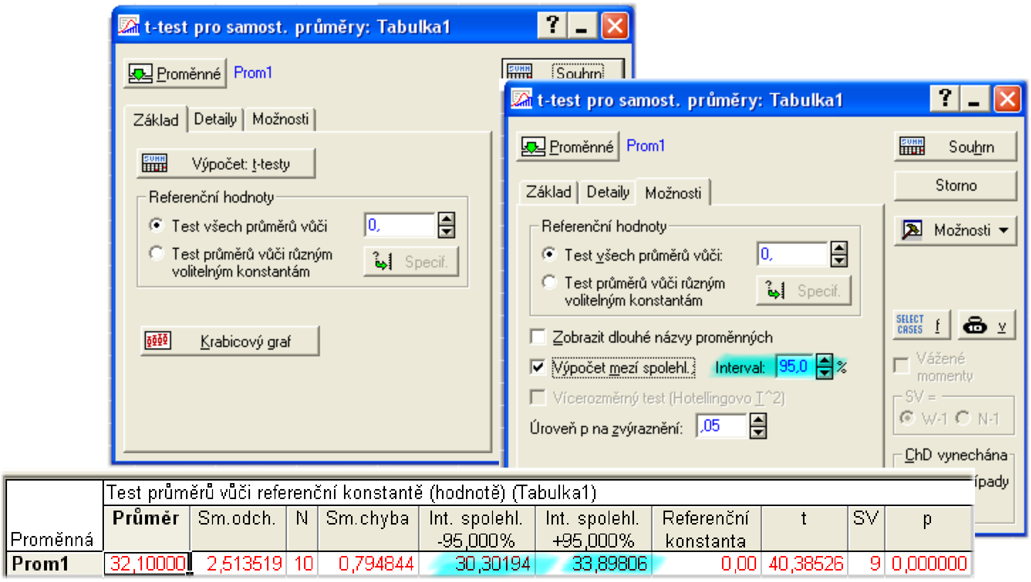
$$\left(32{,}1-\frac{2{,}513519}{\sqrt{10}}\cdot 2{,}262157\,;\,583+\frac{2{,}513519}{\sqrt{10}}\cdot 2{,}262157\right)=$$

$$=\left(32{,}1-1{,}798063\,;\,32{,}1+1{,}798063\right)=\left(30{,}30194\,;\,33{,}89806\right)$$

Tím jsme spočetli 95% konfidenční interval pro střední hodnotu.

iii) Celý výpočet nechat na statistice:

Do programu statistika zadáme požadovaná data a v modulu $\bar{x}$ ***t-test,samost. vzorek*** *spustíme výpočet. Pro výpočet konfidenčního intervalu je podstatná pouze záložka* ***Možnosti****, kde zaškrtneme a nastavíme meze spolehlivosti pro výpočet Interval – 95%. Nejlépe to opět ilustrují obrázky (obrázek 3), na nichž je už je vidět nalezená dolní a horní mez konfidenčního intervalu.*



obrázek 3

Tím jsme spočetli 95% konfidenční interval pro střední hodnotu.

σ

i) Ručně stručně

Ve skriptech případně v paměti vylovíme vzorec pro konfidenční interval pro parametr σ^2 (pro rozptyl), který má tvar:

$$\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} ; \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right) \qquad 2.$$

Nyní je zapotřebí spočítat výběrové *charakteristiky* (výběrový průměr – $\bar{x}$ a výběrovou směrodatnou odchylku – s) podle vzorců:

$\Rightarrow$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ *, kde n je počet pozorování a x_i je hodnota i-tého pozorování*

$\Rightarrow$ $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ *, kde n je počet pozorování a x_i je hodnota i-tého pozorování*

$\Rightarrow$ $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ *je příslušný kvantil rozdělení χ^2 (čti chí – kvadrát) s $(n-1)$ stupni volnosti*

Tedy $\bar{x} = 32{,}1$, $s^2 = 6{,}317778$ *a konečně kvantil nalezený v tabulkách má hodnotu:* $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 19{,}022768$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 2{,}700389$

Dosazením do vztahu 2. dostaneme:

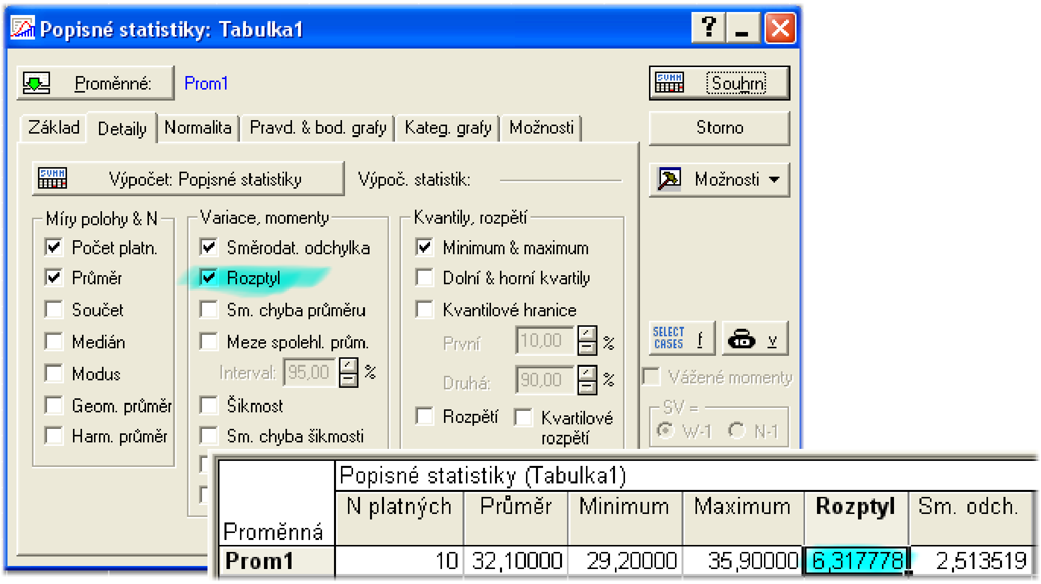
$$\left(\frac{9 \cdot 6{,}317778}{19{,}022768}\,;\,\frac{9 \cdot 6{,}317778}{2{,}700389}\right) = (2{,}98905\,;\,21{,}05623)$$

Pokud požadujeme výsledky pro směrodatnou odchylku (výše uvedeno pro rozptyl) pak stačí krajní body intervalu odmocnit. Tedy získáme $(1{,}728887;4{,}588706)$

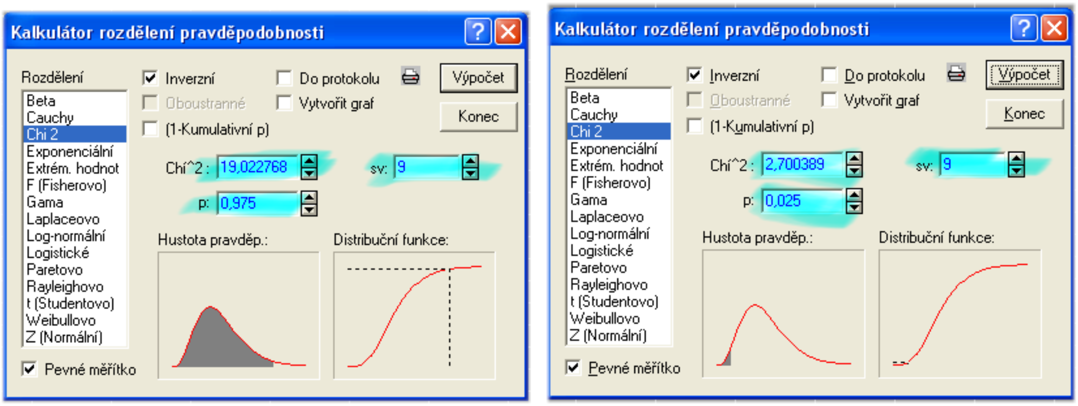
Tím jsme spočetli 95% konfidenční interval pro rozptyl respektive směrodatnou odchylku.

ii) s využitím základních funkcí programu Statistika

Ve skriptech případně v paměti vylovíme vzorec pro konfidenční interval (vztah 2.). Nyní je zapotřebí spočítat výběrový rozptyl – s^2*). Do programu statistika zadáme požadovaná data a v modulu* ***Popisné statistiky*** *si „necháme“ spočítat výběrový rozptyl (obrázek 1). Dále pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru spočteme příslušné kvantily rozdělení* χ^2 *s* $(n-1)$ *stupni volnosti. Zadáme p=0,975, respektive p=0,025. (obrázek 2).*



obrázek 4



obrázek 5

Dosazením do vztahu 2 dostaneme:

$$\left(\frac{9\cdot 6{,}317778}{19{,}022768};\frac{9\cdot 6{,}317778}{2{,}700389}\right)=\left(2{,}98905\,;\,21{,}05623\right)$$

Pokud požadujeme výsledky pro směrodatnou odchylku (výše uvedeno pro rozptyl) pak stačí krajní body intervalu odmocnit. Tedy získáme $\left(1{,}728887;4{,}588706\right)$

Tím jsme spočetli 95% konfidenční interval pro rozptyl respektive směrodatnou odchylku.

iii) Celý výpočet nechat na statistice:

Bohužel statistika neumí

Co se týče doplňkové otázky tázající se na benefit získaný zkonzumováním ½ kg rajčat, zkuste rozmyslet sami. Vše vychází z vlastností střední hodnoty a rozptylu. Výsledek je $\left(15{,}15;16{,}95\right)$.