Cvičení 5

1. Dokažte, že rozptyl[1] lze vyjádřit jako rozdíl aritmetického průměru čtverce náhodné veličiny a čtverce aritmetického průměru hodnot, tj. $\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$. Toto tvrzení dokažte pro

   (a) spojitou náhodnou veličinu (k důkazu použijte vzorce pro výpočet rozptylu a střední hodnoty) i

   (b) obecně (k důkazu použijte vlastnosti rozptylu a střední hodnoty).

2. Uvažujte rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0; 10)$, symbolicky lze vyjádřit skutečnost, že náhodná veličina X sleduje toto rozdělení, takto – $X \sim \mathsf{R}(0; 10)$.

   (a) Napište předpis hustoty pravděpodobnosti tohoto rozdělení. Funkci zakreslete do grafu.

   (b) Napište předpis distribuční funkce tohoto rozdělení. Funkci zakreslete do grafu.

   (c) Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl.

3. Mějme náhodnou veličinu X, jež sleduje Normální rozdělení s parametry $\mu = 3$ a $\sigma^2 = 3{,}61$ (Symbolicky lze tento vztah vyjádřit $X \sim \mathsf{N}(3; 3{,}61)$. Zjistěte následující pravděpodobnosti:

   (a) $\mathsf{P}(X = 4)$,

   (b) $\mathsf{P}(X \leq 4)$,

   (c) $\mathsf{P}(X > 4)$,

   (d) $\mathsf{P}(X \geq 4)$,

   (e) $\mathsf{P}(X < 4)$

   (f) $\mathsf{P}(3 < X \leq 5)$,

   (g) $\mathsf{P}(3 \leq X \leq 5)$.

   Dále zjistěte pro jakou hodnotu a je pravděpodobnost:

   (a) $\mathsf{P}(X \leq a) = 0{,}95$,[2]

   (b) $\mathsf{P}(X > a) = 0{,}25$.

4. Mějme náhodnou veličinu Y, jež sleduje Studentovo rozdělení (nebo též t-rozdělení) s parametrem $n = 43$ (říkáme s n stupni volnosti) (Symbolicky lze tento vztah vyjádřit $Y \sim t(n)$). Zjistěte následující pravděpodobnosti:

   (a) $\mathsf{P}(Y = 0{,}5)$,

[1] samozřejmě pokud $\mathsf{D}X$ existuje.

[2] pro náhodnou veličinu s rozdělením $\mathsf{N}(0; 1)$ se značí $u_{0,95}$

(b) $\mathsf{P}(Y \leq 0{,}5)$,
(c) $\mathsf{P}(Y \geq 0{,}5)$,
(d) $\mathsf{P}(Y < -0{,}5)$,
(e) $\mathsf{P}(-1 < Y \leq 0{,}5)$.

Dále zjistěte pro jakou hodnotu a je pravděpodobnost:

(a) $\mathsf{P}(Y \leq a) = 0{,}99$ (obvykle se značí $t_{0{,}99}(43)$),
(b) $\mathsf{P}(Y > a) = 0{,}12$.

5. Mějme náhodnou veličinu Z, jež sleduje χ^2 rozdělení s parametrem $n = 17$ (říkáme s n stupni volnosti) (Symbolicky lze tento vztah vyjádřit $Z \sim \chi^2(n)$). Zjistěte následující pravděpodobnosti:

   (a) $\mathsf{P}(Z = 15)$,
   (b) $\mathsf{P}(Z \leq 15)$,
   (c) $\mathsf{P}(Z \geq 30)$,
   (d) $\mathsf{P}(Z < 5)$,
   (e) $\mathsf{P}(15 < Z \leq 30)$.

   Dále zjistěte pro jakou hodnotu a je pravděpodobnost:

   (a) $\mathsf{P}(Z \leq a) = 0{,}99$ (obvykle se značí $\chi^2_{0{,}99}(17)$),
   (b) $\mathsf{P}(Z > a) = 0{,}12$.

6. Mějme náhodnou veličinu W, jež sleduje Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s parametry $m = 11$, $n = 19$ (říkáme o m a n stupních volnosti) (Symbolicky lze tento vztah vyjádřit $W \sim F(m;n)$). Zjistěte následující pravděpodobnosti:

   (a) $\mathsf{P}(W = 15)$,
   (b) $\mathsf{P}(W \leq 12)$,
   (c) $\mathsf{P}(W \geq 13)$,
   (d) $\mathsf{P}(W < 5)$,
   (e) $\mathsf{P}(12 < W \leq 13)$.

   Dále zjistěte pro jakou hodnotu a je pravděpodobnost:

   (a) $\mathsf{P}(W \leq a) = 0{,}99$ (obvykle se značí $F_{0{,}99}(11;19)$),
   (b) $\mathsf{P}(W > a) = 0{,}05$.

7. Najděte následující hodnoty:

(a) $u_{0,95}$, $u_{0,05}$, $u_{0,975}$,

(b) $t_{0,95}(10)$, $t_{0,05}(10)$, $t_{0,025}(16)$,

(c) $\chi^2_{0,9}(7)$, $\chi^2_{0,1}(7)$, $\chi^2_{0,99}(16)$,

(d) $F_{0,99}(5;12)$, $F_{0,01}(5;12)$, $F_{0,99}(12;5)$, $F_{0,01}(12;5)$.

8. O rozdělení IQ[3] u obyvatel je známo, že má normální rozdělení se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 15.[4] Jaká je pravděpodobnost, že Váš kamarád(ka) má IQ:

   (a) větší než 85,

   (b) větší než 125,

   (c) mezi 90 a 110,

   (d) rovno 100?

   (e) Jaká je pravděpodobnost, že má IQ menší než 125 za předpokladu, že je inteligenčně nadprůměrný?

   (f) Jakou by bylo nutno stanovit hranici pro přijetí do elitního „intoušského“ klubu[5], aby do něj patřily jen 2 % lidí s nejvyšším IQ?

9. Pro oděvní továrnu je neziskové vyrábět pro velmi malé a velmi velké osoby. Ignoruje proto 7,5 % největších a 7,5 % nejmenších osob. Výška mužů se řídí normálním rozdělením $\mathsf{N}(69; 2{,}8^2)$ (míry jsou v palcích). Nalezněte nejmenší a největší výšku, pro kterou vyrábět.

10. Životnost žárovky v hodinách se řídí normálním rozdělením $\mathsf{N}(61; 6{,}3^2)$. Výrobce garantuje, že pouze 3 % žárovek se spálí před garantovanou dobou. Určete tuto dobu.

11. Výtah má nosnost 700 kg. Průměrná váha osob v kg má rozdělení $\mathsf{N}(70; 400)$.

   (a) Do výtahu náhodně nastoupilo šest osob. Jaká je pravděpodobnost, že výtah bude přetížen.[6]

   (b) Kolik osob musí nejvýše nastoupit, aby pravděpodobnost přetížení byla menší než 0,001? Těžké

---

[3]IQ – inteligenční kvocient – je číslo, popisující inteligenci člověka v poměru k populaci. Základní definici IQ vytvořil v roce 1912 německý psycholog William Stern, když definoval míru inteligence jako poměr odhadnutého „mentálního“ věku a věku kalendářního. Hodnota IQ tedy vyjadřuje úroveň rozumových schopností jedince vzhledem k jeho věkua tvoří asi 20 % intelektové vybavenosti člověka.

[4]Většina testů inteligence ve Spojených státech inklinuje používat směrodatnou odchylku rovnou 15 nebo 16. Nicméně, evropská IQ test inklinují používat směrodatnou odchylku rovnou 24 nebo 25. Proto by IQ 130 (+2 směrodatné odchylky) v USA mělo odpovídat IQ 148–150 v Evropě.

[5]Mensa je mezinárodní společenská organizace založená roku 1946 v Oxfordu. Je to nevýdělečné apolitické sdružení nadprůměrně inteligentních lidí bez rozdílu rasy a vyznání. Více na Mensa ČR: *http://www.mensa.cz/*.

[6]Využijte vlastnosti: $X_i \sim \mathsf{N}(\mu; \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$ a X_i jsou nezávislé veličiny, pak $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathsf{N}(n \cdot \mu; n \cdot \sigma^2)$.

12. Projděte příklady ve cvičeních věnovaných náhodném jevu a vyhledejte ty, které je možno řešit pomocí známého rozdělení náhodné veličiny – spojité. Teorie ⇜⇝ Praxe

13. Nechť X je náhodná veličina sledující normální rozdělení s parametry μ a σ^2. Dokažte, že náhodná veličina $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sleduje normální normované rozdělení. ↺T↻ Těžké

14. Nechť X je náhodná veličina sledující normální rozdělení s parametry μ a σ^2. Dokažte, že náhodná veličina $Y = \frac{X-\mu}{s}$ sleduje studentovo rozdělení s $(n-1)$ stupni volnosti, kde s je výběrová směrodatná odchylka získaná z výběru o rozsahu n. ↺T↻ Těžké

15. Uvažujme krychli s hranou délky X. X je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na $\langle 0; 10\rangle$. Určete střední hodnotu a rozptyl objemu krychle? Těžké

16. V souborech 08_12_04a.pdf a 08_12_04b.pdf naleznete zadání průběžné písemky. Otestujte své znalosti ;-). ♣♢♡♠