Cvičení 4

1. Dokažte pro diskrétní náhodnou veličinu, že rozptyl[1] lze vyjádřit jako rozdíl aritmetického průměru čtverce náhodné veličiny a čtverce aritmetického průměru hodnot, tj. $\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$ (k důkazu použijte vzorce pro výpočet rozptylu a střední hodnoty).

2. Alternativní rozděleni popisuje jednokolový pokus v němž úspěch nastává s pravděpodobností π a neúspěch s pravděpodobností $1 - \pi$, $\pi \in (0, 1)$. Tento pokus je do řeči náhodné veličiny, označme ji například X, převeden následovně:

výsledek pokusu	zakódování	pravděpodobnost
úspěch	$X = 1$	$\mathsf{P}(X = 1) = \pi$
neúspěch	$X = 0$	$\mathsf{P}(X = 0) = 1 - \pi$

   (a) Odvoďte vzorec pro výpočet střední hodnoty a rozptylu tohoto rozdělení.

   (b) Jak vypadá distribuční funkce alternativního rozdělení? Uveďte předpis a nakreslete ji.

3. V testu je 8 otázek. Na každou je nabídnuto 5 odpovědí, právě jedna je vždy správná.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že při náhodné volbě odpovědi dostaneme k, $k = 0, \ldots, 8$, správných odpovědí?

   (b) Jak vypadá distribuční funkce rozdělení, jež náhodná veličina popisující tento pokus sleduje?

   (c) Jaký je střední hodnota počtu správných odpovědí?

   (d) Jaká je pravděpodobnost, že ztratíme maximálně jeden bod za předpokladu, že jsme získali nadpoloviční počet bodů

4. Vyjet z domečku – nasadit figurku do hry – při hře „Člověče nezlob se!“ lze při padnutí šestky na hrací kostce. Předpokládejte, že v případě padnutí šestky nasazujete figurku do hry a že Vás nikdo nevyhodil.

   (a) Jaká je pravděpodobnost, že budete moc vyjet z domečku s poslední (čtvrtou) figurkou při desátém kole?

   (b) Jaký je střední počet pokusů pro nasazení všech čtyř figurek?

5. Pravděpodobnost, že stroj vyrobí zmetek je 0,001. V okamžiku, kdy je vadný výrobek vyroben, je stroj zastaven a seřízen. S jakou pravděpodobností bude stroj zastaven:

   (a) bezprostředně po vyrobení stého kusu.

   (b) nejpozději po vyrobení stého kusu.

[1] samozřejmě pokud $\mathsf{D}X$ existuje.

(c) Jaký je střední počet vyrobených výrobků do vyrobení prvního zmetku?

6. Nechť do ústředny přichází v průměru 120 hovorů za jednu hodinu. Počet hovorů za časový interval délky t se modeluje Poissonovým rozdělením $\mathsf{Po}(\lambda)$ s parametrem $\lambda = a \cdot t$, kde t je délka intervalu a a je parametr (v tomto případě je to, řekněme parametr četnosti příchozích hovorů).

   (a) Spočtěte jaká je pravděpodobnost, že za půl minuty nepřijde hovor.

   (b) Spočtěte s jakou pravděpodobností přijdou do ústředny za půl minuty méně než 3 hovory.

7. Ve spořitelně pracuje 15 mužů a 21 žen. 6 zaměstnanců z nich si sjednává stavební spoření.

   (a) Vypočítejte pravděpodobnost, že jsou mezi nimi právě dva muži, tj. dva muži a čtyři ženy.

   (b) Vypočítejte pravděpodobnost toho, že jsou to maximálně z jedné poloviny muži.

8. Mějme náhodnou veličinu X, jež sleduje Binomické rozdělení s parametry $n = 9$ a $\pi = 0{,}7$ (Symbolicky lze tento vztah vyjádřit $X \sim \mathsf{Bi}(9; 0{,}7)$. Zjistěte následující pravděpodobnosti:

   (a) $\mathsf{P}(X = 5)$,

   (b) $\mathsf{P}(X \leq 5)$,

   (c) $\mathsf{P}(X < 5)$,

   (d) $\mathsf{P}(X > 5)$,

   (e) $\mathsf{P}(X \geq 5)$,

   (f) $\mathsf{P}(3 < X \leq 5)$,

   (g) $\mathsf{P}(3 \leq X < 5)$.

9. Mějme náhodnou veličinu Y, jež sleduje Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 17$ (Symbolicky lze tento vztah vyjádřit $Y \sim \mathsf{Po}(17)$. Místo parametru často používáno udání střední hodnoty náhodné veličiny neboť $\mathsf{E}Y = \lambda$). Zjistěte následující pravděpodobnosti:

   (a) $\mathsf{P}(Y = 12)$,

   (b) $\mathsf{P}(Y \leq 12)$,

   (c) $\mathsf{P}(Y > 12)$,

   (d) $\mathsf{P}(12 < Y \leq 20)$.

10. Mějme náhodnou veličinu Z, jež sleduje Hypergeometrické rozdělení s parametry $M = 15$, $N = 36$ a $n = 6$. (Symbolicky lze tento vztah vyjádřit $Z \sim \mathsf{H}(15; 36; 6)$. Značení není tak zažité jako u binomického a Poissonova rozdělení). Zjistěte následující pravděpodobnosti:

    (a) $\mathsf{P}(Z = 2)$,

    (b) $\mathsf{P}(Z \leq 3)$,

    (c) $\mathsf{P}(Z > 5)$,

    (d) $\mathsf{P}(2 < Z \leq 6)$.

11. Jaká je pravděpodobnost, že při deseti poctivých hodech poctivou hrací kostkou, tj. každá strana padá s pravděpodobností $1/6$,

    (a) padnou samé šestky,

    (b) nepadne ani jedna šestka,

    (c) padne alespoň jedna šestka,

    (d) padnou právě tři šestky?

    (e) Jaký počet šestek je v sérii deseti hodů nejvíce pravděpodobný?

12. Co je pravděpodobnější, že

    (a) šesti kostkami hodíme alespoň jedenkrát šestku, nebo

    (b) dvanácti kostkami hodíme alespoň dvakrát šestku?

13. V běžně velké populaci krys se albín v průměru vyskytuje v 0,01 exemplářích, ostatní krysy jsou normálně pigmentované. Jaká je pravděpodobnost, že v běžně velké populaci

    (a) není žádný albín,

    (b) je právě jeden albín,

    (c) je alespoň jeden albín,

    (d) jsou dva albíni za předpokladu, že je tam alespoň jeden?

    (e) Jaká je pravděpodobnost, že pětkrát tak velká populace krys, než byla uvažována doposud, skrývá jednoho albína?

14. V trolejbusu MHD je 30 cestujících. Z celkového počtu cestujících jede 8 „na černo“. Ostatní mají platný cestovní doklad. Do trolejbusu přistoupí revize jízdenek, která mezi zastávkami stihne zkontrolovat 12 náhodně vybraných cestujících. Jaká je pravděpodobnost, že mezi zkontrolovanými

    (a) je pět černých cestujících,

    (b) jsou více jak tři černí cestující,

(c) jsou pouze dva cestující s platným cestovním dokladem.

15. Projděte příklady v předchozích dvou cvičeních věnovaných náhodném jevu a vyhledejte ty, které je možno řešit pomocí známého rozdělení náhodné veličiny – diskrétní (alternativní, binomické, hypergeometrické a Poissonovo). Hodnoty pravděpodobností přepočtěte pomocí „excelovských“ funkcí `BINOMDIST`, `HYPGEOMDIST` a `POISSON`. Teorie $\leftrightsquigarrow$ Praxe

16. [aneb Dcv.] V souboru 08_10_22.pdf naleznete zadání průběžné písemky. Otestujte své znalosti ;-). ♣♢♡♠