

Cvičení 3

1. Pravděpodobnost úspěchu určitého pokusu je 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že při dvojném nezávislém opakování pokusu bude dosaženo alespoň jednoho úspěchu?
2. Zahradník zasel 8 semen. Ví, že semínko vyklíčí s 40% pravděpodobností.
 - (a) Určete pravděpodobnost, že vyklíčí alespoň jedno semínko.
 - (b) Kolik musí zahradník zasadit minimálně semen, aby vyklíčilo alespoň jedno s 80% pravděpodobností?
3. Operátor telemarketingu ze svých zkušeností ví, že oslovený zákazník nabízený produkt akceptuje z 5%.
 - (a) S jakou pravděpodobností prodá nabízený produkt všem 20 osloveným zákazníkům?
 - (b) S jakou pravděpodobností prodá nabízený produkt alespoň jednomu z 20 oslovených zákazníků?
 - (c) Kolik zákazníků musí oslovit, aby alespoň jeden z nich produkt akceptoval s 80% pravděpodobností?
4. V pokusném rybníčku má váčkový kapří plůdek při přechodu z K_0 na K_1 vyzorované ztráty 95%.¹
 - (a) S jakou pravděpodobností přežije celá kapří obsádka, která má 200 kusů váčkového kapřího plůdku?
 - (b) S jakou pravděpodobností přežije alespoň jeden kus váčkového kapřího plůdku z 200 vysazených?
 - (c) Kolik kusů váčkového kapřího plůdku je třeba vysadit, pokud se alespoň jeden z nich má dožít jednoho roku s 99% pravděpodobností?
5. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi čtyřmi po sobě narozenými dětmi budou:
 - (a) první dva chlapci a další dvě dívky,
 - (b) první dva chlapci,
 - (c) právě dva chlapci,
 - (d) alespoň dva chlapci?
6. Rodina plánuje v červenci 3 dny dovolené. Pravděpodobnost, že v červencovém dni vůbec nezaprší je 0,62. Pravděpodobnost, že alespoň chvíli prší, je 0,38. Počasí jednotlivých dnů je nezávislé na počasí ostatních dní. Jaká je pravděpodobnost, že:

¹Normativní ztráty během vegetačního období jsou nižší – 85 %.

- (a) po celou dobu dovolené nebude pršet,
 - (b) každý den zaprší,
 - (c) budou převažovat dny bez deště,
 - (d) bude alespoň jeden den bez deště,
 - (e) po celou dobu dovolené se ráz počasí nezmění?
7. Aby měl student vyznamenání, musí mít průměr do 1,5. Víme, že uvedenému kritériu vyhovuje 38 % dívek a 29 % chlapců. Jaká je pravděpodobnost, že když se zeptáme smíšené dvojice vytvořené nezávisle na studijních úspěších:
- (a) budou mít oba vyznamenání,
 - (b) bude mít alespoň jeden z dvojice vyznamenání,
 - (c) bude mít vyznamenání pouze dívka,
 - (d) bude mít vyznamenání pouze hoch,
 - (e) bude mít vyznamenání právě jeden z páru,
 - (f) nebude mít vyznamenání nikdo?
8. Nechť pravděpodobnostní prostor Ω jsou přirozená čísla do padesáti ($\Omega = \{1, 2, \dots, 50\}$). Definujme na tomto pravděpodobnostním prostoru jev A jako přirozená čísla menší nebo rovna 25 ($A = \{1, 2, \dots, 25\}$), jev B jako sudá přirozená čísla ($B = \{x \in \Omega : x = 2k, k = 1, 2, \dots, 25\}$) a jev C jako čísla dělitelná čtyřmi ($C = \{x \in \Omega : 4|x\}$). Jsou tyto jevy párově nezávislé?
9. Uvažte následující pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a definujme náhodné jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ a $C = \{1, 2, 5, 6\}$. Jsou tyto jevy
- (a) párově nezávislé, respektive
 - (b) vzájemně (totálně) nezávislé?
10. Výrobní linka se sestává z 5-ti automatů. Aby byl výrobek dokončen musí projít všemi obráběcími procedurami. Žádná procedura neovlivňuje další. První automat produkuje zmetky s pravděpodobností 0,002, pro ostatní automaty jsou pravděpodobnosti produkce zmetků 0,01, 0,05, 0,008 a konečně 0,003. Jaká je pravděpodobnost, že
- (a) linka vyrobila bezvadný výrobek,
 - (b) výrobek, který prošel procedurou má vadu?
11. Nemocnice je z bezpečnostních důvodů zásobována elektrickou energií z 5-ti rovnocenných zdrojů. Každý zdroj je dostačující pro běh nemocnice. Porucha na prvním zdroji nastává s 0,2% pravděpodobností, pro další zdroje jsou pravděpodobnosti výpadku 0,01, 0,05, 0,008 a 0,003. Jaká je pravděpodobnost, že

- (a) elektrická energie bude,
 - (b) budou v nemocnici startovat záložní agregát?
12. Student jde na zkoušku, ale neví, který ze tří možných předmětů (RPZ, PV, PG) se zkouší. Ví, že neumí 40 % otázek z RPZ, 15 % z PV a 20 % z PG.²
- (a) Jaká je pravděpodobnost, že bude vyhozen?
 - (b) Jaká je pravděpodobnost, že bude vyhozen z RPZ, byl-li z RPZ zkoušen?
 - (c) Bude-li vyhozen, jaká je pravděpodobnost toho, že to bude z RPZ?
13. Celostátní pozorování zvyklostí manželských párů ukázalo, že potraviny pro domácnost pravidelně nakupují v 60 % domácností manželky (z toho 40 % manželek bere s sebou na nákup dítě) a v 25 % domácností nakupují manželé (muži). Zároveň se však ukázalo, že chystá-li na nákup manželka, pak ve 30 % domácností jsou manželé (muži) ochotni se „obětovat“ a jdou na nákup spolu s manželkou. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané domácnosti:
- (a) chodí na nákup zásadně oba manželé,
 - (b) chodí na nákup alespoň jeden z manželů (neposílají děti, babičku apod.),
 - (c) nenakupuje žádný z manželů (muž + žena),
 - (d) jde-li na nákup manžel, doprovodí jej manželka,
 - (e) nakupuje manželka a bere s sebou dítě?
14. Ve skupině studentů je 18 „matematiků“, 12 „techniků“ a 7 „právníků“. Pravděpodobnost splnění IQ normy je 0,9 u matematika, 0,75 u technika a 0,65 u právníka.
- (a) S jakou pravděpodobností náhodně vybraný student splní tuto IQ normu?
 - (b) Náhodně vybraný student splnil IQ normu. S jakou pravděpodobností se jednalo o právníka?
15. Nemoc se vyskytuje u 1 % lidí. Nemocný člověk má pozitivní nález s 95% pravděpodobností a zdravý s 30% pravděpodobností.³

²Pravděpodobnosti, jež jsou známy předem ($P(A|B_i)$, $P(B_i)$, pro $i = 1, \dots, n$) se označují jako apriorní pravděpodobnosti, pravděpodobnosti, které jsou získány jako výsledek Bayesova vzorce ($P(B_i|A)$ pro $i = 1, \dots, n$) se nazývají aposteriorní pravděpodobnosti.

³Nechť existují doplňkové jevy – jev, že osoba nemoc má, a jev, že osoba sledovanou nemoc nemá. Pravděpodobnost výskytu nemoci v populaci se obvykle nazývá *prevalence* (apriorní pravděpodobnost, pretestová pravděpodobnost). Uvažme diagnostický test, pro nějž jsou známy pravděpodobnosti, se kterými odhaluje chorobu u zdravých a nemocných (též apriorní pravděpodobnosti). *Senzitivitou* testu se rozumí pravděpodobnost odhalení nemoci u nemocných, *specificitou* pravděpodobnost, že test je negativní u zdravých osob. Obdobně *nesprávná (falešná) pozitivita* je pravděpodobnost, že zdravá osoba je označena za nemocnou a naopak *nesprávná (falešná) negativita* je pravděpodobnost, že nemocná osoba je označena za zdravou.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že člověk je diagnostikovaný jako nemocný (pozitivní nález)?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že je člověk správně diagnostikovaný, tj. nemocný jako nemocný a zdravý jako zdravý?
- (c) Jaká je pravděpodobnost, že člověk je nemocný, má-li pozitivní nález?
- (d) Jaká je pravděpodobnost, že je člověk zdravý i přes pozitivní nález?
- (e) Jsou jevy „být zdrav“ a „být pozitivně diagnostikován“ nezávislé?

Zajímavé jsou i aposteriorní pravděpodobnosti – pravděpodobnosti podmíněné výsledkem testu (potes-
tová pravděpodobnost). Hovoří se o tzv. *prediktivní hodnotě pozitivního testu*, což je pravděpodobnost, že
osoba je opravdu nemocná, když byla pozitivně diagnostikována a *prediktivní hodnotě negativního testu*,
což je pravděpodobnost, že osoba je opravdu zdravá, byla-li za zdravou označena. Podobně je tomu i
v právnickém prostředí – nemocí bývá lež a diagnostický prostředkem například detektor lži.