Cvičení 1

Vzorce, elementární calculus

1. Opakování matematické symboliky např:
   (a) konstanty: e, π, $\imath$, ∞, …
   (b) písmena řecké abecedy: α, β, δ, Δ, θ, Θ, λ, μ, σ, Σ, ϕ, Φ, χ, ω, Ω, …
   (c) funkce (proměnné x), definiční obory, obory hodnot a jejich inverzní funkce: e^x, a^x, x^a, $\log x$, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, tg$x$, cotg$x$, $\max x$, $\min x$, $|x|$, …
   (d) číselné obory: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, …
   (e) spojky (logické a množinové), kvantifikátory: $\neg, '$, non, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\emptyset$, $^{\complement}$, $\cap$, $\cup$, $\subset, \subseteq$, $=$, $\setminus$, $\in$, $\forall$, $\exists$, …

2. Dosaďte do následujících vzorců (Pro informaci je v poznámkách pod čarou uvedeno, čeho se vlastně výpočty týkají, i když je to pro samotnou práci se vzorci nepodstatné):
   (a) $V = a \cdot b \cdot c$,
   kde $a = 2$; $b = 1/2$ a $c = 7$;[1]
   (b) $k = 1 + 3{,}3 \cdot \log n$,
   kde $n = 50$;[2]
   (c) $KGZ = (R/Q) \cdot 100\,\%$,
   kde $R = 154$; a $Q = 2928$;[3]
   (d) $SGR = [(\ln W_t - \ln W_0) \cdot t^{-1}] \cdot 100\,\%$
   kde $W_t = 1200$; $W_0 = 60$ a $t = 153$;[4]
   (e) $$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}},$$
   kde $n_1 = 10$; $n_2 = 11$; $\bar{x}_1 = 82{,}4$; $\bar{x}_2 = 80{,}0$; $s_1^2 = 12{,}1$; $s_2^2 = 10{,}5$.[5]
   (f) Vytvořte vzorec pro výpočet *kusové návratnosti ryb* (KNR), což je procentuální podíl počtu ulovených ryb (N_u) z počtu ryb vysazených N_n.[6]

---

[1]Vzorec pro výpočet objemu kvádru, kde a, b a c jsou délky jeho hran.

[2]Tzv. *Sturgesův vzorec*, který slouží k výpočtu počtu intervalů k, do nichž je vhodné rozdělit n pozorování při intervalovém třídění statistického souboru. Více v šestém cvičení.

[3]Vzorec pro výpočet *koeficientu zralosti gonád* (KZG), je poměrem hmotnosti gonád (R) k celkové hmotnosti těla (Q) a udává se v procentech.

[4]Vzorec pro výpočet *specifické rychlosti růstu* (**S**pecific **G**rowth **R**ate), kde W_t je průměrná individuální hmotnost na konci období, W_0 na začátku a t je délka období ve dnech.

[5]Výpočet testového kritéria u dvouvýběrového t-testu pro soubory se shodnými rozptyly (test na shodu středních hodnot), kde $\bar{x}_i$ jsou výběrové průměry, s_i výběrové směrodatné odchylky a n_i rozsahy souborů, pro $i = 1, 2$. Více v desátém cvičení.

[6]Kusová návratnost ryb se sleduje za jeden rok, nebo jako víceletý průměr a závisí: na typu vod, na druhu ryby, na stáří a velikosti vysazovaných ryb a na návštěvnosti revíru sportovními rybáři. Poskytuje informace o kvalitě zarybňování a o migraci ryb.

(g) Vytvořte vzorec pro výpočet *krmného koeficientu* (FCR), což je podíl spotřeby krmiva v gramech za sledované období (F) z přírůstku hmotnosti v gramech ($FCE = W_t - W_0$); kde W_t je hmotnost obsádky na konci období, W_0 na začátku období. V jakých jednotkách krmný koeficient vychází? Dále vypočtěte hodnotu FCR, když při odchovu 300 kg násady kapra do tržní hmotnosti bylo použito 700 kg krmné směsi s výslednou produkcí 1050 kg tržní ryby[7].

3. Napište nebo načrtněte následující množiny:

   (a) $\{2k\}_{k=1}^{\infty},\ k \in \mathbb{Z}$,

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$.

4. Jak by jste zapsali množinu:

   (a) lichých čísel v absolutní hodnotě menších než 10,

   (b) prvních sto přirozených čísel?

5. Nechť jsou vektory[8] $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^{\mathrm{T}} = (5, 7, 13, 0, 6)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v} = (0, 0, 4, 9, 3)^{\mathrm{T}}$ a $\mathbf{w} = (2, 2, 3, 2, 7)^{\mathrm{T}}$. Jednotlivé složky vektoru udávají počet rybek různých druhů v soukromých sbírkách Uršuly, Viktora a Waltera. Přičemž složky po řadě určují počet Ramirézek (Cichlidka Ramirezova), Akar hnědých, Bojovnic pestrých, Čichavců zakrslých a Neonek červených. Vektor $\mathbf{c} = (30, 25, 40, 25, 22)^{\mathrm{T}}$ reprezentuje cenu jednotlivých druhů ryb v Kč.[9] Vypočtěte:

   (a) $u_1 + v_1 + w_1$ Kolik ramirézek mají dohromady?

   (b) $(1, 1, 1, 1, 1) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{5} v_i$ Kolik rybek má Viktor?

   (c) $\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{c} = \sum_{i=1}^{5} w_i \cdot c_i$ Jakou cenu mají Walterovi rybičky?

6. Vytvořte matici $\mathbf{R} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ z vektorů v úkolu 5.

---

[7] Zvažte, zda je nutné údaje převádět na gramy. Hmotnosti v gramech se uvažují z důvodu výpočtu krmného koeficientu pro jednotlivou rybu, pro celé obsádky je rozumnější používat „větší“ hmotnostní jednotky

[8] Vektor budeme uvažovat jako jednosloupcovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m1}$. Kdyby jsme to takto neuvažovali, museli bychom rozlišovat skalární součin pro vektory a pak součin matic, tak jak jej znáte z maticové algebry. My se tedy omezíme na maticové násobení, u kterého musíme dbát na správné rozměry matice, při nichž je tento součin definován. Skalární součin dvou vektorů v maticovém podání pak musí být např. $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v} = (u_{ij})_{1n} \cdot (v_{ij})_{n1}$, jehož výsledkem je číslo (skalár) – jednoprvková matice $(a_{ij})_{11} = u_{11} \cdot v_{11} + u_{21} \cdot v_{12} + \cdots + u_{n1} \cdot v_{1n}$. Vzhledem k tomu, že matice vektoru má pouze jeden sloupec, zapisujeme jen číslo řádku a fakt, že se jedná o sloupcový vektor zvýrazňujeme pomocí symbolu $^{\mathrm{T}}$, např. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$. Vektory se jako sloupcové v textu obvykle jako sloupce nevypisují, neboť by zabíraly příliš mnoho místa. Běžně se vektor značí tučně a skolněně – $\boldsymbol{v}$, kdežto matice pouze tučně a svisle – $\mathbf{v}$.

[9] ceny k 8/2007

(a) Vypište tuto datovou matici **R**

(b) $\sum_{j=1}^{3} r_{1j}$ Kolik ramirézek mají dohromady?

(c) $\sum_{i=1}^{5} r_{i2}$ Kolik rybek má Viktor?

(d) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} r_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} r_{ij}$ |[10] Kolik rybek mají dohromady?

(e) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} r_{ij} \cdot c_i$ |[11] Jakou cenu mají rybičky všech akvaristů?

Kombinatorika

1. (a) Za lokomotivou jsou zapojeny 4 různé vagóny. První cisternový, druhý na uhlí, třetí na sypký materiál a poslední plošinový. Výpravčí má ve stanici k následující zboží připravené k přepravě: LTO[12], brikety, naftu, palety tašek jednoho typu, koks, glycerol, mazut, hnědé uhlí, antracit, písek, dodávku aut jednoho typu, štěrk a betonové kanalizační potrubí. Zboží se na vagóny nakládá vždy od jednoho druhu. Kolika způsoby může výpravčí různě naložit zboží na vagóny? Za různé naložení se pokládá změna byť jediného zboží.

   (b) Na jídelním lístku jsou 3 aperitivy, 9 předkrmů, 5 polévek, 16 hlavních jídel, 2 moučníky, 4 alkoholické a 8 nealkoholických nápojů. Určete kolika způsoby lze sestavit menu sestávající se ze všech sedmi součástí.

2. (a) Restaurace nabízí několik pokrmů. V dalším textu jsou uvedeny druhy pokrmů, počty jídel jednotlivých druhů pokrmů jsou uvedeny v závorce. Sýry a bezmasá jídla (8), ryby (15), drůbež (22), vepřové maso (15), jehněčí maso (5), hovězí maso (8) a zeleninové hrnce (6). Kolik dní by jste mohli chodit do této restaurace, aby jste každý den jedli něco jiného, přičemž pokrm s různou přílohu nepovažujeme za různý?

   (b) Pět restaurací nabízí shodně ne svých jídelních lístcích po 20-ti hlavních jídlech. Kolik dní by jste mohli chodit do těchto pěti restaurací, aby jste každý den jedli něco jiného, přičemž pokrm s různou přílohu nepovažujeme za různý?

3. (a) Ve třídě je 27 studentů. Z celkového počtu studentů 12 mluví anglicky a 17 německy. Oběma jazyky mluví 7 studentů. Zodpovězte následující otázky:

      i. Kolik studentů mluví nějakým cizím jazykem?

[10] Pro konečné „rozumné“ součty lze pořadí sčítání přehazovat.
[11] c_i pro $i = 1, \ldots, 5$ jsou opět příslušné ceny rybiček z vektoru **c** v úkolu 5.
[12] **L**ehký **T**opný **O**lej

© Roman Biskup

ii. Kolik studentů mluví pouze anglicky nebo pouze německy?
iii. Kolik studentů nemluví žádným z výše uvedených jazyků?

(b) Na přednášku ze statistiky by studenti – co se barev svršků týče – dostavili následujícím způsobem pestří. V první lavici bylo možno nalézt černou, bílou, tmavě modrou, světle modrou a tyrkysovou barvu; v druhé lavici hnědou, oranžovou, tmavě a světle modrou, bílou, černou a zelenou; nakonec řada třetí zářila: fialovou, hnědou, černou, tyrkysovou, zelenou, bílou, červenou a žlutou. Ověřte, že pravidlo inkluze a exkluze dává opravdu správné výsledky pro počet barev ve sjednocení jak dvou, tak tří řad.

4. (a) V hotelu je 70 neekvivalentních lůžek (každé lůžko je jiné). Kolika způsoby lze lůžka přidělit 62 hostům z pohledu hostů?

(b) Kolik různých zastupitelstev může mít obec o 15-ti volitelných občanech, obsazuje-li se post starosty, místostarosty, uklízečky, obecního blbečka a veřejné drbny? Uvažujte, že funkce nelze kumulovat, tj. každá osoba může mít nejvýše jednu funkci.

(c) Na šachovnici osm kamarádů postupně rozmístí osm svých označených věží. Kolik variant uspořádání může nastat:

i. stojí-li tak, aby se neohrožovaly (tj. žádné dvě věže neleží ve stejné řadě či sloupci),
ii. nezáleží-li na tom, zda se ohrožují, či nikoliv.

5. (a) Kolika způsoby lze seřadit do fronty n zákazníků?

(b) Kolika způsoby lze zapsat libovolnou posloupnost n navzájem různých znaků (tj. každý je k dispozici pouze jednou)?

(c) Kolika způsoby si mohou stoupnout do fronty před Sněhurku její trpaslíci[13] tak, že:

i. bez omezení (tj. každý může stát v zástupu kdekoliv),
ii. Šmudla je jako obvykle poslední,
iii. Šmudla kupodivu poslední není?

(d) Na šachovnici se rozmístí osm věží. Kolik variant uspořádání může nastat:

i. stojí-li tak, aby se neohrožovaly (tj. žádné dvě věže neleží ve stejné řadě či sloupci),
ii. nezáleží-li na tom, zda se ohrožují, či nikoliv.

6. (a) Kolik různých zastupitelstev může mít obec o 15-ti volitelných občanech, obsazuje-li se post starosty, místostarosty, uklízečky, obecního blbečka a veřejné drbny? Uvažujte, že funkce lze kumulovat, tj. jedna osoba může mít např. všechny funkce.

[13] Pro neznalé pohádek, prameny uvádějí, že je jich sedm: Prófa, Kejchal, Rejpal, Šťístko, Dřímal, Stydlín a v textu zmíněný Šmudla.

(b) Anglická abeceda má 26 písmen. Kolik z ní lze teoreticky vytvořit šestipísmených slov?

(c) Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin od jedné do pěti?

7. (a) Kolik různých slov vznikne přesmyčkou písmen ve slově:
   i. DAN,
   ii. RAMA a
   iii. RAMADAN?

   (b) Kolik různých pětimístných přirozených čísel lze vytvořit z číslic 2, 3, 3, 7 a 7?

   (c) Kolik různých slov vznikne přesmyčkou písmen ve slově POPOKATEPETL[14]?

8. (a) V hotelu je 70 neekvivalentních lůžek (každé lůžko je jiné). Kolika způsoby lze lůžka přidělit 62 hostům z pohledu pokojské?

   (b) V Matesu se tipuje 5 čísel z 35. Kolik je všech možných tipů?

   (c) Kolika způsoby lze na šachovnici vybrat tři pole tak, aby všechna neměla stejnou barvu?

   (d) Kolika způsoby lze rozdělit 8 chlapců a 4 dívky na dvě volejbalová družstva tak, aby v každém byla alespoň jedna dívka?

   (e) Sešlo se 11 kamarádů a na pozdrav si každý s každým potřásli rukou. Kolikrát se akt potřesení ruky zopakoval?

9. (a) Zjistěte, kolik takových různých kvádrů existuje, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu $\langle 2, 15 \rangle$.

   (b) V pytlíku je 23 žlutých, 12 červených, 15 modrých a 20 zelených kuliček. Z pytlíku je náhodně vybráno 10 kuliček. Kolik různých seskupení lze získat?

10. Pokud si nevíte rady možný návod naleznete v kombinatorika.pdf

[14](z aztéckého jazyka Nahuatl *popōka*, dýmati, a *tepētl*, hora), činná sopka ve střední části Mexika na okraji Mexické náhorní plošiny; 5 452 m n.m. Kráter je hluboký 200 m, sněžná čára ve výši 4 300 m n.m. Národní park. Pro příklad použit fonetický přepis oficiálního jména „Popocatépetl“.